

N° D'ORDRE :

575

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS-SCIENCES PHYSIQUES

Par P.-.H. LEDEBOER.

Préparateur à la Faculté des Sciences de Paris.

1^{re} THÈSE. — SUR LA DÉTERMINATION DU COEFFICIENT DE SELF-INDUCTION
2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 27 juillet 1886, devant la Commission d'Examen.

MM. TROOST, *Président.*

LIPPMANN, {
BOUTY, { *Examineurs.*

PARIS

IMPRIMERIE DE LA LUMIÈRE ÉLECTRIQUE

31, BOULEVARD DES ITALIENS, 31

1886

N^o D'ORDRE :

575

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS-SCIENCES PHYSIQUES

Par P.-H. LEDEBOER.

Préparateur à la Faculté des Sciences de Paris.

1^{re} THÈSE. — SUR LA DÉTERMINATION DU COEFFICIENT DE SELF-INDUCTION

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 27 juillet 1886, devant la Commission d'Examen.

MM. TROOST, *Président.*

LIPPMANN, }
BOUTY, } *Examineurs.*

PARIS

IMPRIMERIE DE LA LUMIÈRE ÉLECTRIQUE

31, BOULEVARD DES ITALIENS, 31

1886

ACADÉMIE DE PARIS

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

	MM.	
DOYEN.....	HÉBERT, Professeur.....	Géologie.
PROFESSEUR HONORAIRE..	PASTEUR.	
	DUCHARTRE.....	Botanique.
	DE LACAZE-DUTHIERS...	Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée.
	BERT.....	Physiologie.
	HERMITE.....	Algèbre supérieure.
	TROOST.....	Chimie.
	FRIEDEL.....	Chimie organique.
	O. BONNET.....	Astronomie.
PROFESSEURS.....	DARBOUX.....	Géométrie supérieure.
	DEBRAY.....	Chimie.
	TISSERAND.....	Physique.
	LIPPMANN.....	Astronomie.
	HAUTEFEUILLE.....	Minéralogie.
	BOUTY.....	Physique.
	APPELL.....	Mécanique rationnelle.
	DUCLAUX.....	Chimie biologique.
	N.....	Calcul des probabilités. Physique mathématique.
PROFESSEUR ADJOINT.....	WOLF.....	Physique céleste.
	POINCARÉ.....	Mécanique physique et expérimentale.
CHARGÉS DE COURS.....	PICARD.....	Calcul différentiel et Calcul intégral.
	YVES DELAGE.....	Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée.
PROFESSEUR SUPPLEANT..	DASTRE.....	Physiologie.
SECRÉTAIRE.....	PHILIPPON.	

A LA MÉMOIRE

DE

P. DESAINS

MEMBRE DE L'INSTITUT,

FONDATEUR DU LABORATOIRE D'ENSEIGNEMENT DE PHYSIQUE A LA SORBONNE.

PROFESSEUR DE PHYSIQUE A LA FACULTÉ DES SCIENCES

Hommage de Reconnaissance

P. H. LEDEBOER.

PREMIÈRE THÈSE

SUR

LA DÉTERMINATION

DU

COEFFICIENT DE SELF-INDUCTION

Dans le cas où une bobine ne renferme pas de fer, le coefficient de self-induction est exprimé par l'intégrale double

$$L = \iint \frac{\cos \varepsilon}{r} ds ds'.$$

Cette intégrale ⁽¹⁾, qu'on ne peut résoudre que dans quelques cas particuliers, a été l'objet de travaux importants de Gauss ⁽²⁾, de Weber ⁽³⁾, de Maxwell ⁽⁴⁾, de Lord Rayleigh ⁽⁵⁾, de Weinstein ⁽⁶⁾, etc.

Ces auteurs ont montré qu'on peut dans certains cas offerts par la pratique, développer cette intégrale en série convergente et calculer l'expression numérique avec l'approximation qu'on désire. Dans quelques cas, d'ailleurs, on peut résoudre cette équation à l'aide des intégrales elliptiques.

Un des éléments qui intervient dans ce calcul est la distance entre deux spires et, pour la connaître avec quelque approximation, on est obligé d'enrouler le fil dans des gorges creusées d'avance.

⁽¹⁾ Elle a été donnée pour la première fois par F. E. NEUMANN, *Abh. d. Berlin, Akad.*, 1845.

⁽²⁾ GAUSS, *Werke*, vol. V, p. 622.

⁽³⁾ WEBER, *Abh. Math. phys. Klasse Sach. Ges. d. Wiss B.* VI, p. 607.

⁽⁴⁾ MAXWELL, *Phil. Transact.* 1865, p. 155,

⁽⁵⁾ LORD RAYLEIGH, *Proc. Royal Soc.*, n° 213, 1881.

⁽⁶⁾ WEINSTEIN, *Wiedemann, Ann. der physik*, 21, p. 329, 1884.

Le calcul ne donne aucun résultat pour des bobines enroulées à la manière ordinaire; lorsque la bobine renferme du fer, on ne connaît plus les lois qu'il s'agit d'appliquer.

Les premières expériences relatives à l'induction d'un courant sur lui-même n'avaient pas pour but de déterminer le coefficient de self-induction, mais de constater l'extra-courant et d'en découvrir les lois.

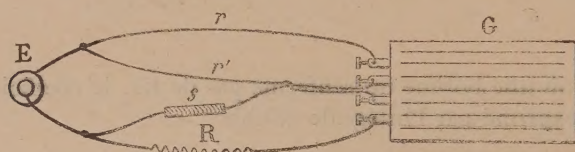
Dans le cas d'une bobine sans fer, le coefficient de self-induction est une quantité constante, tandis que l'extra-courant dépend de la résistance du circuit. Le coefficient de self-induction permet donc de mieux préciser les phénomènes que la connaissance de l'extra-courant.

L'existence de l'extra-courant a été montrée pour la première fois par Jenkin ⁽¹⁾ et par Masson ⁽²⁾ en 1834; mais c'est surtout Faraday ⁽³⁾ qui, par son expérience classique, a appelé l'attention sur ce phénomène.

Quant à des mesures quantitatives, on trouve les premières indications dans un mémoire de M. Edlung ⁽⁴⁾.

Voici en quoi consiste la méthode employée par ce physicien :

Un galvanomètre ou boussole de Weber G est arrangé en galvanomètre



différentiel. Dans l'une des branches, on a intercalé la bobine *s*, sur laquelle on expérimente. Dans ces conditions, le galvanomètre n'indique pas de déviation, sous l'influence d'un courant continu, lorsque les résistances *s*, *R*, *r* et *r'* sont égales, ou lorsqu'on a

$$\frac{s}{R} = \frac{r}{r'}$$

Mais, lorsqu'on coupe le circuit en E, l'aiguille du galvanomètre est déviée brusquement sous l'influence de l'extra-courant, et l'angle d'impulsion peut servir de mesure à l'extra-courant.

Toutefois il ne paraît pas que M. Edlung ait fait des mesures absolues. Ce qu'il se proposait principalement, c'était de démontrer l'égalité de l'extra-courant d'ouverture et de l'extra-courant de fermeture : il a

⁽¹⁾ JENKIN, *Faraday, Exp. Res.*, série IX, § 1049, 1834.

⁽²⁾ MASSON, *Ann. de Phys.* t. 66, p. 1, 1837.

⁽³⁾ FARADAY, *Exp. Res.*, IX, § 1079 et 1087.

⁽⁴⁾ EDLUNG, *Pogg. Ann.*, T. LXXVII.

montré que l'extra-courant de fermeture est toujours un peu plus intense, ce qui provient de ce que toutes les piles se polarisent plus ou moins.

Les expériences de M. Edlung portent sur des bobines sans fer. Des expériences analogues entreprises par M. Ryke ⁽¹⁾, mais sur des bobines renfermant des noyaux de fer, lui ont permis de généraliser les résultats trouvés par M. Edlung. Dans les travaux précédents, on s'est surtout occupé de l'extra-courant, sans mesurer le coefficient de self-induction. C'est surtout à propos de la détermination de l'ohm que l'attention des physiciens s'est tournée vers le calcul et la mesure de ce coefficient qui intervient dans les formules; c'est même à cause d'une erreur dans l'évaluation de ce coefficient que l'ohm de l'association britannique a une valeur trop petite.

On doit à Maxwell ⁽²⁾ plusieurs méthodes pour la détermination expérimentale du coefficient de self-induction. En dehors du calcul théorique qu'il a développé, Maxwell a indiqué les méthodes suivantes :

- 1° Comparaison d'un coefficient de self-induction avec un coefficient d'induction mutuelle;
- 2° Comparaison de deux coefficients de self-induction;
- 3° Comparaison de la capacité électro-magnétique de self-induction d'une bobine avec la capacité électrostatique d'un condensateur;
- 4° Détermination du coefficient de self-induction par la mesure de la quantité d'électricité de l'extra-courant.

Maxwell n'indique dans ses travaux que les principes de ces méthodes, sans entrer dans les détails de l'expérimentation.

Les méthodes de comparaison du coefficient de self-induction avec d'autres coefficients de self-induction ou avec des coefficients d'induction mutuelle, ont été étudiées expérimentalement par M. Brillouin ⁽³⁾. Pour que ces méthodes fussent applicables d'une manière courante, il faudrait avoir à sa disposition des termes de comparaison, ce qui n'a pas lieu actuellement. Aussi ces méthodes ne sont-elles pas d'une application bien commode et bien générale.

La dernière méthode de Maxwell est identique à celle proposée par M. Edlung, avec cette différence toutefois, que Maxwell remplace l'équilibre électrique du galvanomètre différentiel, par l'équilibre obtenu à l'aide du pont de Wheatstone.

Pour éliminer la force électromotrice de la pile ou l'intensité du courant, on peut faire une deuxième mesure dans laquelle on rompt l'équilibre du pont par une résistance additionnelle, ajoutée à celle de la bobine.

Cette méthode est celle que lord Rayleigh ⁽⁴⁾ a appliquée à propos de

(1) RYKE. *Pogg. Ann.* t. CII.

(2) MAXWELL. *Phil. Transact.* 1865, t. 155 et *Treatise on Electr. et Magn.* 1872.

(3) BRILLOUIN. *Thèses de Doctorat*, Paris, 1881.

(4) LORD RAYLEIGH. *Proc. Royal Soc.*, n° 213, 1881, p. 116.

la détermination de l'ohm. Il paraît toutefois que c'est Jenkin ⁽¹⁾ qui a proposé pour la première fois l'emploi de la résistance auxiliaire.

Une autre méthode, basée sur un principe absolument différent et tout nouveau a été proposée, il y a quelques années, par M. Joubert ⁽²⁾. L'auteur se sert, à cet effet, de courants alternatifs, et il prend comme instrument de mesure, l'électromètre à quadrants employé dans des conditions particulières. Comme, dans le travail qui suit, nous nous sommes sur tout efforcé de nous servir du galvanomètre Deprez-d'Arsonval employé avec le pont de Wheatstone, nous n'entrerons dans aucun détail relativement à la méthode de M. Joubert.

CHAPITRE PREMIER

MÉTHODE DE DÉTERMINATION DU COEFFICIENT DE SELF-INDUCTION

La méthode que nous avons appliquée est basée sur le principe suivant ⁽³⁾ : La bobine ou l'électro-aimant dont on cherche le coefficient de self-induction L , et dont la résistance électrique est R , est mise dans une

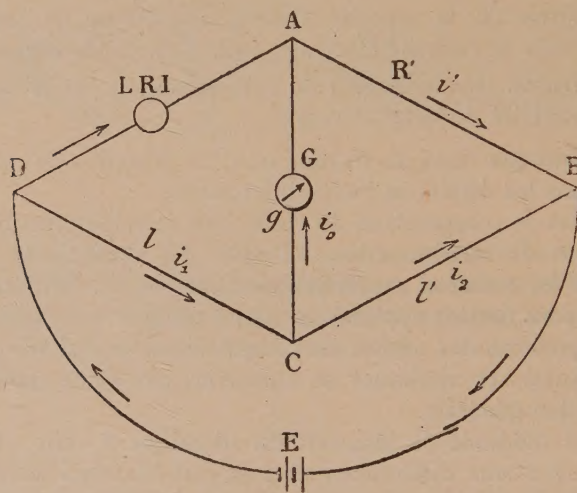


FIG. 2

des branches d'un pont de Wheatstone, dont les autres branches ont des résistances R' , l et l' . Lorsque l'équilibre existe, on a la relation

$$\frac{R}{R'} = \frac{l}{l'}$$

(1) JENKIN. *Report of the Brit. Ass.*, 1863.

(2) JOUBERT. *Ann. de l'École Normale*, t. X, et *Journal Physique*

(3) MAXWELL. *Phil. Rans. R. S. London*, V. 155, Part. 1, p. 475.

La fermeture et l'ouverture du circuit de la pile donnent naissance à des courants de charge et de décharge dus à la capacité électromagnétique de la bobine. L'angle d'impulsion du galvanomètre permet de déterminer le coefficient de self-induction par les considérations suivantes :

Les théorèmes de Kirchoff appliqués aux courants instantanés fournissent les équations suivantes :

$$A \quad I = i' - i_o$$

$$C \quad i_2 = i_1 - i_o$$

$$A B C D \quad R' i' - l' i_2 - l i_1 + R I = -L \frac{dI}{dt}$$

$$D A C \quad R I - g i_o - l i_1 = -L \frac{dI}{dt} + G \frac{d i_o}{dt}$$

G étant le coefficient de self-induction du galvanomètre.

Si l'on tient compte des deux premières équations, les deux dernières peuvent s'écrire

$$(R' + R) I + (R' + l') i_o - (l + l') i_1 = -L \frac{dI}{dt}$$

$$R I - g i_o - l i_1 = -L \frac{dI}{dt} + G \frac{d i_o}{dt}$$

En éliminant i_1 , entre ces deux équations, on trouve :

$$(l R' - R l) I + [l(R' + l') + g(l + l')] i_o = L l' \frac{dI}{dt} - G(l + l') \frac{d i_o}{dt}$$

Le coefficient de I est nul, car, d'après l'équation de l'équilibre du pont, on a :

$$\frac{R}{R'} = \frac{l}{l'}$$

Pour trouver la quantité d'électricité qui a traversé le galvanomètre, il faut intégrer cette expression depuis $t = 0$ avec $I = I$ et $i_o = 0$ jusqu'à $t = t'$, où on a

$$I = 0 \quad i_o = 0$$

On trouve ainsi :

$$\int i_o dt = \frac{L l' I}{l(R' + l') + g(l + l')}$$

Le coefficient G du galvanomètre n'intervient pas, car, comme l'intensité du courant est nulle avant et après la décharge, le terme corres-

pendant s'annule. L'établissement du courant donnera lieu à une formule identique, mais de signe contraire, car on aura, dans le cas, pour $t = 0$

$$I = 0 \quad i_o = 0$$

et pour $t = t'$

$$I = I \quad i_o = 0$$

La formule précédente donne lieu à quelques remarques :

1° La quantité d'électricité $\int i_o dt$ qui passe à travers le galvanomètre ne dépend pas de la manière dont le circuit a été coupé ou établi. Le courant étant établi, on peut l'annuler de deux manières différentes, soit en rompant le circuit, soit en mettant la pile en court circuit. Les expériences montrent que le résultat est le même dans ces deux cas;

2° L'équation

$$\int i_o dt = \frac{L I'}{I(R' + l') + g(l + l')}$$

peut être mise sous la forme

$$\int i_o dt = \frac{L I}{R + l + g\left(\frac{R}{R'} + 1\right)}$$

puisque

$$\frac{l}{l'}(R' + l') = R + l$$

Tant que le rapport

$$\frac{l}{l'} = \frac{R}{R'}$$

est constant, l'équation précédente montre qu'on peut augmenter l dans d'assez fortes proportions, (pourvu que le terme $R + l$ soit petit par rapport à g) sans que l'expression $\int i_o dt$ soit beaucoup diminuée. Ce résultat a une certaine importance pour l'application pratique de la méthode ⁽¹⁾.

Pour déterminer L , d'après la formule précédente, il faudrait, en outre des résistance et de l'intensité du courant, connaître $\int i_o dt$. Il y a plusieurs moyens d'obtenir ce résultat; le moyen le plus simple est le procédé suivant.

(1) Dans les mémoires relatifs à ce sujet, les auteurs ont l'habitude de remplacer la valeur de I en fonction de la force électromotrice et de la résistance intérieure de la pile. On obtient ainsi une formule plus compliquée, mais, d'après notre avis, il est préférable de conserver la formule sous la forme la plus simple et de déterminer directement l'intensité I , au lieu de s'occuper des constantes de la pile.

Ce procédé consiste à comparer l'impulsion de l'aiguille du galvanomètre, à la déviation permanente que l'aiguille éprouve sous l'influence d'un courant continu. Lorsqu'on détruit l'équilibre du pont par l'addition d'une petite fraction r de la résistance R , on trouve l'intensité du courant i'_0 qui passe dans le galvanomètre, au moyen de l'équation

$$(lR' - Rl')I + [l(R' + l') + g(l + l')]i'_0 = 0$$

Or, on a

$$\frac{R}{R'} = \frac{l}{l'}$$

Donc, si on remplace R par $R + r$, on trouve

$$lR' - Rl' = lR' - (R + r)l' = -rl'$$

D'où

$$i'_0 = \frac{l' r I}{l(R' + l') + g(l + l')}$$

Nous avons trouvé d'autre part :

$$\int i_0 dt = \frac{L l' I}{l(R' + l') + g(l + l')}$$

On a donc

$$\frac{\int i_0 dt}{i'_0} = \frac{L}{r}$$

Nous avons supposé que, par l'addition de la résistance r à R , l'intensité I du courant dans la branche AD n'a pas varié. Si cette intensité était devenue I' dans le deuxième cas, on aurait

$$\frac{\int i'_0 dt}{i'_0} = \frac{L}{r} \frac{I}{I'}$$

Généralement la variation de l'intensité par l'introduction de la résistance additionnelle r est assez petite pour qu'on puisse la négliger : quelquefois, cependant, lorsqu'il s'agit de forts électro-aimants à faible résistance, on doit tenir compte de cette correction.

Il reste à comparer l'impulsion δ produite par la quantité d'électricité $\int i_0 dt$, avec la déviation permanente α produite par le courant i'_0 .

Si le galvanomètre employé était périodique et sans amortissement, on aurait la relation simple

$$\frac{\int i_0 dt}{i'_0} = \frac{\delta T}{\alpha \pi}$$

T étant la durée d'une oscillation simple.

Dans le cas ordinaire, on a

$$\frac{\int i_o dt}{i_o} = \frac{\delta}{\alpha} \frac{T}{\sqrt{\pi^2 + \lambda^2}} e^{\frac{\lambda}{\pi} \operatorname{artg} \frac{\pi}{\lambda}}$$

λ étant le décrement logarithmique.

Cette formule suppose que λ est une quantité constante; il n'est peut être pas inutile de faire observer que cette condition n'est pas toujours remplie. Dans beaucoup de galvanomètres que nous avons eu l'occasion d'examiner, nous avons constaté que le décrement logarithmique λ varie avec l'amplitude des oscillations.

En appliquant les formules précédentes on trouve, pour le coefficient de self-induction, l'expression :

$$L = r \frac{T}{\sqrt{\pi^2 + \lambda^2}} e^{\frac{\lambda}{\pi} \operatorname{artg} \frac{\pi}{\lambda}} \frac{\delta}{\alpha}$$

Pour $\lambda = 0$, c'est-à-dire pour un galvanomètre périodique sans amortissement, cette formule se réduit à

$$L = r \frac{T}{\pi} \frac{\delta}{\alpha} \dots$$

On voit par ces formules qu'on a avantage à prendre un galvanomètre pour lequel T soit petit, c'est-à-dire les oscillations rapides; d'un autre côté, il faut que la durée d'oscillation soit très considérable par rapport à la durée de la charge ou de la décharge de la bobine dont on cherche le coefficient de self-induction.

Les expériences montrent qu'on peut toujours considérer la décharge comme instantanée, mais que la charge prend un temps très appréciable pour de gros électro-aimants.

L'emploi d'un galvanomètre à faible amortissement nécessite un dispositif auxiliaire, pour faciliter l'arrêt de l'aiguille, autrement les observations deviennent presque impossibles; le plus simple est de disposer un courant auxiliaire actionné par une pile locale.

On arrive ainsi avec quelque habitude à arrêter l'aiguille au bout de 2 ou 3 oscillations.

Lorsque le décrement logarithmique λ est petit, on peut pour simplifier le calcul, développer en série l'expression

$$\frac{\pi}{\sqrt{\pi^2 + \lambda^2}} e^{\frac{\lambda}{\pi} \operatorname{artg} \frac{\pi}{\lambda}}$$

On a, dans ce cas ⁽¹⁾

$$\operatorname{arg} \frac{\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{2} - \frac{\lambda}{\pi} + \frac{1}{3} \frac{\lambda^3}{\pi^3} \dots$$

Puis

$$\begin{aligned} e^{\frac{\lambda}{\pi} \operatorname{arg} \frac{\pi}{\lambda}} &= e^{\frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda^2}{\pi^2} + \frac{1}{3} \frac{\lambda^4}{\pi^4}} \\ &= 1 + \left(\frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda^2}{\pi^2} + \frac{1}{3} \frac{\lambda^4}{\pi^4} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda^2}{\pi^2} \right)^2 + \dots \\ &= 1 + \frac{\lambda}{2} + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{\pi^2} \right) \lambda^2 \end{aligned}$$

Et

$$\frac{\sqrt{\pi^2 + \lambda^2}}{\pi} = 1 - \frac{1}{2} \frac{\lambda^2}{\pi^2}$$

d'où

$$\frac{\pi}{\sqrt{\pi^2 + \lambda^2}} e^{\frac{\lambda}{\pi} \operatorname{arg} \frac{\pi}{\lambda}} = 1 + \frac{\lambda}{2} - \left(\frac{3}{2} \frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{8} \right) \lambda^2 = 1 + \frac{\lambda}{2} - 0,027 \lambda^2$$

Il vient donc :

$$L = r \frac{T}{\pi} \left(1 + \frac{\lambda}{2} - 0,027 \lambda^2 \right) \frac{\delta}{\alpha}$$

Le coefficient de λ^2 est donc petit et ce terme peut presque toujours être négligé. Voici une application de cette formule.

Dans un cas, on a trouvé que pour 5 oscillations la déviation diminue de 95 à 40 millimètres. On a donc :

$$\lambda = \log \operatorname{nép} \frac{95}{40} = 0,1730$$

ce qui donne, pour le facteur

$$\frac{\pi}{\sqrt{\pi^2 + \lambda^2}} e^{\frac{\lambda}{\pi} \operatorname{arg} \frac{\pi}{\lambda}},$$

par le calcul direct : 1,0856.

Par la formule abrégée, on a :

$$1 + \frac{\lambda}{2} = 1,0865 \text{ et } 0,027 \lambda^2 = 0,00081$$

d'où

$$1 + \frac{\lambda}{2} - 0,027 \lambda^2 = 1,0857$$

(1) SERRET, *Trigonométrie*, p. 288

On trouve donc le même résultat, et on voit qu'en négligeant le terme $0,027\lambda^2$, on ne commet pas une erreur de $1/1000$.

Cherchons maintenant quelle doit être la résistance du galvanomètre : elle doit dépendre de la résistance de la bobine qu'on mesure. Si cette résistance est faible, comme cela arrive pour la plupart des électro-aimants, il faut prendre un galvanomètre à faible résistance, car la sensibilité d'un galvanomètre augmente, dans des circonstances ordinaires, moins rapidement que la résistance. Voici un exemple : il s'agit de deux galvanomètres Thomson, l'un à 4 bobines et d'une résistance totale de 10 000 ohms, l'autre à 2 bobines et d'une résistance de 7 ohms (6,88 ohms). La durée des oscillations était à peu près égale dans les deux cas. Voici les impulsions produites par la décharge d'un microfarad chargé à 1 volt.

Grand Thomson	10 000 ohms	résistance	$\delta = 300$	millimètres.
Petit	7	—	$\delta = 20$	—

On voit donc que, si la sensibilité du grand galvanomètre est 15 fois plus considérable, la résistance est plus de 1000 fois plus grande. Lorsque la résistance extérieure est faible, on a donc tout avantage à se servir du galvanomètre à faible résistance.

Dans beaucoup de cas, l'impulsion produite par l'extra-courant fait sortir l'image hors de l'échelle, surtout lorsqu'il s'agit d'électro-aimants ; il faut donc diminuer la sensibilité du galvanomètre. Avec un galvanomètre à faible résistance, il est plus avantageux d'intercaler directement une résistance que de se servir d'un shunt.

Nous allons calculer maintenant de quelle manière l'introduction d'une résistance dans le circuit du galvanomètre réduit l'angle d'impulsion.

Il suffit pour cela de calculer la quantité d'électricité $\int i_0 dt$, pour deux valeurs différentes de la résistance du galvanomètre soit g et g' .

On trouve d'après les formules précédentes, en représentant par I et I' , les intensités des courants qui circulent dans la branche AD :

$$\frac{\int i_0 dt}{\int i'_0 dt} = \frac{l(R' + l') + g'(l + l')}{l(R' + l') + g(l + l')} \frac{I}{I'} = \frac{l'(R + l) + g'(l + l')}{l'(R + l) + g(l + l')} \frac{I}{I'}$$

On a dans la plupart des cas : $I = I'$. D'où

$$\frac{\int i_0 dt}{\int i'_0 dt} = \frac{R + l + g' \left(1 + \frac{l}{l'}\right)}{R + l + g \left(1 + \frac{l}{l'}\right)}$$

On peut observer que, dans tous les cas où l'on fait les deux expériences, décharge pour l'impulsion et résistance additionnelle pour la déviation

permanente, on n'a pas besoin de s'occuper de la résistance ajoutée à celle du galvanomètre, car la même formule sert dans les deux cas. Mais lorsqu'on a déterminé la déviation permanente avec une résistance du galvanomètre différente de celle employée pour la décharge, il faudrait appliquer la formule :

$$L = r \frac{\delta}{\alpha} \frac{R + l + g \left(1 + \frac{l}{l'}\right)}{R + l + g' \left(1 + \frac{l}{l'}\right)} e^{\frac{\lambda}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\pi}{\lambda}} \frac{T}{\sqrt{\pi^2 + \lambda^2}}.$$

Cette formule permet de réduire autant qu'on le voudra les impulsions du galvanomètre. Si on représente par k le facteur

$$k = e^{\frac{\lambda}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\pi}{\lambda}} \frac{T}{\sqrt{\pi^2 + \lambda^2}},$$

facteur qui ne dépend que des constantes du galvanomètre, et par n la fraction

$$n = \frac{R + l + g' \left(1 + \frac{l}{l'}\right)}{R + l + g \left(1 + \frac{l}{l'}\right)}$$

on a

$$L = k r \frac{\delta}{\alpha} \frac{1}{n}.$$

Dans la pratique, il est commode d'ajouter au galvanomètre une petite résistance auxiliaire, de telle sorte que $R + l + g \left(1 + \frac{l}{l'}\right)$ devienne un nombre entier d'ohms, ce qui est facile à réaliser car $\frac{l}{l'}$ est constant. Dans le cas du galvanomètre que nous avons employé, on a

$$g = 6 \text{ ohms } 88 \text{ et } \frac{l}{l'} = 1$$

et pour une certaine bobine

$$R + l = 0 \text{ ohm } 2$$

ce qui donne

$$g + \frac{R + l}{2} = 7 \text{ ohms } 08.$$

On a ajouté une résistance auxiliaire de 2,92 ohms, de telle sorte que la résistance dont il s'agit devient 10 ohms. Dans ce cas, il suffit d'ajouter au galvanomètre des résistances auxiliaires de 10, 90, 990 ohms pour réduire la sensibilité à 1/2, 1/100, 1/1000, etc.

Dans le but de vérifier ces formules, nous avons entrepris la détermination du coefficient de self-induction d'une bobine sans fer. Dans ces

conditions, la théorie indique que le coefficient est constant ; en faisant varier l'intensité dans les limites étendues (de 1 à 300), on a donc un moyen facile de vérification.

Le système de bobines était formé par un électro-aimant dont on avait enlevé tout le fer ; les deux bobines étaient enroulées d'un fil de cuivre de 2 millimètres de diamètre et de 40 mètres de long.

La résistance totale était de 0,2 ohm. Les 3 autres branches du pont étaient formées chacune d'une bobine du même fil de cuivre et de même longueur que celui de l'électro-aimant. Ce fil était enroulé en double pour éviter l'induction du fil sur lui-même.

Pour la prise des contacts, nous employions des godets de mercure, dans lesquels venaient plonger les extrémités des fils de cuivre, préalablement amalgamés avec soin. Quelques bouts du même fil, introduits dans une des branches du pont, permettaient d'obtenir à peu près l'équilibre, qu'on pouvait, du reste, achever par le remplacement d'un des godets par une auge remplie de mercure, dont la résistance totale était de 0,0005 ohm. En déplaçant le fil amalgamé dans cette auge, il était possible d'augmenter ou de diminuer la résistance, d'une portion très faible, et d'assurer ainsi un équilibre parfait.

Comme galvanomètre, nous avons employé le galvanomètre Thomson à 2 bobines et à faible résistance dont nous avons déjà parlé ; on pouvait intercaler dans le circuit de ce galvanomètre une résistance allant jusqu'à plus de 10,000 ohms.

Pour la mesure de l'intensité du courant, on prenait au moyen d'un galvanomètre aperiodique Deprez-d'Arsonval, la différence de potentiel aux bornes de l'électro-aimant ; l'échelle avait été graduée par l'introduction de résistances, de telle façon que 1 volt donnât 100 millimètres, ou 0,1 de volt 100 millimètres à volonté, par un simple changement des fiches du shunt.

Le pont étant symétrique, la place assignée au galvanomètre était indifférente.

Le courant était produit par des éléments Daniell, des éléments Bunsen ou le plus souvent par des accumulateurs.

Le galvanomètre Deprez-d'Arsonval permettait de vérifier la constance de la pile. Nous avons pu faire varier la différence de potentiel, aux bornes de l'électroaimant, de 0°,007 à 2° ; ce qui porte l'intensité du courant de 0,035 ampère à 10 ampères.

On a adapté au galvanomètre, l'amortisseur auxiliaire dont nous avons déjà parlé.

Pour vérifier dans ces conditions la constance du coefficient de self-induction, il suffit de constater que le rapport

$$\frac{\int i_0 dt}{E}$$

est une quantité constante. Dans cette formule, E est la force électro-

motrice aux bornes de la bobine, dont la résistance est R. On a donc la relation :

$$I = \frac{E}{R},$$

si I représente l'intensité du courant qui traverse la bobine.

La force électro-motrice E est mesurée par le galvanomètre Deprez-d'Arsonval, comme nous l'avons expliqué et $\int i_0 dt$ par les impulsions du galvanomètre Thomson à faible résistance.

Le tableau suivant donne les nombres ainsi obtenus :

FORCE élect. motr. E en volts	RÉSISTANCE totale du galvanom. en ohms	IMPULSIONS		IMPULSION ramenée à 0 ^v , 0 1 $\frac{\int i_0 dt}{E}$
		observée	réduite à 10 ohms	
0 007	7	3 4	2 4	3 4
0 01	7	4 2	2 9	2 9
0 02	7	8 8	6 2	3 1
0 03	7	13 8	9 7	3 2
0 04	7	18 5	12 9	3 2
—	10	12 8	12 8	3 2
0 05	10	17 5	17 5	3 5
—	20	8 9	17 8	3 5
0 06	20	10 5	21 0	3 5
0 07	20	11 7	23 4	3 3
0 08	20	13 5	27 0	3 4
0 09	20	15 4	30 8	3 4
0 10	20	16 8	33 6	3 4
0 15	30	17 6	52 8	3 5
—	40	13 0	52 0	3 5
0 20	40	17 7	70 8	3 5
—	80	8 9	71 2	3 5
0 247	80	11 1	88 8	3 6
Autre série				
0 18	40	15 7	62 8	3 5
—	80	7 7	61 6	3 5
0 20	40	17 2	68 8	3 5
0 27	80	11 6	92 0	3 5
0 36	80	15 7	126 0	3 5
0 46	160	10 0	160 0	3 5
0 55	—	11 5	184 0	3 4
0 64	—	13 4	214 0	3 4
0 70	—	15 4	246 0	3 5
—	320	7 7	246 0	3 5
0 80	—	8 8	282 0	3 4
0 94	—	10 0	320 0	3 4
1 26	—	13 6	435 0	3 5
1 80	—	19 6	627 0	3 5
—	640	9 9	633 0	3 5

Ce tableau montre que le rapport $\frac{\int i_0 dt}{E}$ est une quantité constante, car sauf quelques exceptions, ce rapport oscille entre 3 4 et 3 5. La force

électro-motrice E a varié de 0,007 volt à 1,80 volt, c'est-à-dire dans le rapport de 1 à 250, sans que la dernière colonne ait subi aucune augmentation graduelle.

La formule relative à la résistance ajoutée à celle du galvanomètre, se vérifie également bien. Ainsi, on retrouve un rapport constant chaque fois qu'on change la résistance additionnelle du galvanomètre, sans faire varier la force électromotrice; on voit de plus par l'ensemble du tableau que la formule se vérifie, lorsqu'on porte la résistance du galvanomètre de 7 à 640 ohms. La quatrième colonne a été calculée d'après la formule, c'est-à-dire qu'on a adopté pour résistance constante, la résistance du galvanomètre augmentée de manière à obtenir 10 ohms. Par exemple, pour 0,1 volt on avait une résistance totale de 20 ohms et une impulsion observée de 16,8 c. m. Si la résistance avait été 10 ohms, on aurait dû avoir $16,8 \times 2 = 33,6$, c'est le nombre inscrit dans la quatrième colonne.

Pour déterminer le coefficient de self-induction il faut en outre connaître la déviation permanente que le galvanomètre éprouve, lorsqu'on augmente une des branches du pont d'une fraction donnée de la résistance de la bobine.

Dans le cas qui nous occupe, on a trouvé la déviation de 20 centimètres pour une force électromotrice de 0,10 volt, la résistance totale du circuit du galvanomètre étant 57 ohms, et la résistance additionnelle étant de 0,80 mètre du même fil de cuivre de 2 millimètres de diamètre. Si la résistance du circuit du galvanomètre avait été de 10 ohms, on aurait eu une déviation de $\frac{20 \times 57}{10} = 114$ centimètres; pour une force

électro-motrice de 0,01 volt, on aurait donc 11,4 centimètres.

Quant à la résistance de ce fil, on a trouvé 0,20 ohm pour 40 mètres, ce qui donne 0,004 ohm pour 0,80 mètre.

Les constantes du galvanomètre sont :

Durée d'une oscillation simple

$$T = 2^s, 2.$$

Décrètement logarithmique

$$\lambda = \log \text{ nép } \frac{\theta}{\theta'} = \log \text{ nép } 1,24 = 0,214.$$

On trouve ainsi :

$$\frac{T}{\pi} \left(1 + \frac{\lambda}{2} \right) = 0,77$$

et

$$L = r \frac{T}{\pi} \left(1 + \frac{\lambda}{2} \right) \frac{\delta}{\alpha} = 0,77 \times r \times \frac{\delta}{\alpha},$$

δ étant l'impulsion produite par l'extra-courant, et α la déviation permanente sous l'influence de la résistance additionnelle r .

Nous avons trouvé que lorsque $r = 0,004$ ohm $\alpha = 11,4$ centimètres et, que dans les mêmes conditions, $\delta = 31$ centimètres.

Ainsi

$$L = 0,77 \times 0,004 \times \frac{3,1}{11,4} \times 10^9 = 0,00084 \times 10^9 \text{ centim.}$$

car la résistance étant évaluée en ohms, les longueurs sont évaluées en 10^9 centimètres.

Dans la méthode précédente, c'est-à-dire avec l'intervention de la résistance additionnelle r le coefficient du self-induction se trouve finalement rapporté à la résistance r et à la durée d'une oscillation simple T . Les déviations du galvanomètre n'y entrent que comme un rapport et peu importe de quelle façon on les mesure, pourvu que cette manière soit identique pour δ et pour α . Le décrement logarithmique λ n'intervient que comme une correction et pour se placer dans de bonnes conditions, il faut que λ soit petit.

Il faut donc apporter toute l'attention à la détermination de T et de r .

La durée T se détermine sans difficulté avec une grande approximation en comptant un certain nombre d'oscillations. Il n'en est pas de même pour r , car, dans notre exemple, on a $r = 0,004$ et on sait qu'il est assez difficile de déterminer exactement ces petites résistances.

Nous avons employé la méthode du pont double de Thomson, ce qui nous a fourni la valeur $r = 0,00403$, valeur presque identique à celle détruite de la longueur du fil. Une autre difficulté provient des contacts, lorsqu'on a affaire à d'aussi faibles résistances, car le moindre dérangement des fils peut introduire des résistances bien supérieures à celle de r .

Pour ces raisons, il nous paraît, dans beaucoup de cas, préférable d'appliquer directement l'équation fondamentale

$$\int i_o dt = \frac{L I'}{l(R' + l') + g(l + l')}$$

La quantité I est l'intensité du courant qui passe par la bobine, dont on cherche le coefficient de self-induction L ; il est facile de déterminer rapidement cette intensité avec exactitude, en mesurant la force électromotrice aux bornes de la bobine.

Voyons maintenant comment on peut déterminer $\int i_o dt$. Si le galvanomètre était périodique, sans amortissement, on aurait entre la quantité d'électricité $\int i_o dt$, qui donne à l'aiguille du galvanomètre une impulsion δ et l'intensité du courant i , qui fait dévier l'aiguille d'un angle α , la relation

$$\frac{\int i_o dt}{i} = \frac{T}{\pi} \frac{\delta}{\alpha}$$

Dans le cas ordinaire, le décrement logarithmique étant λ , on aurait

$$\frac{\int i_0 dt}{i} = \frac{T}{\sqrt{\pi^2 + \lambda^2}} \frac{\frac{\lambda}{\pi} \operatorname{artg} \frac{\pi}{\lambda} \frac{\delta}{\alpha}}{\frac{\delta}{\alpha}}.$$

En tenant compte de ces relations, on trouve, d'après la formule

$$\int i_0 dt = \frac{L l' I}{l(R' + l') + g(l + l')}$$

l'équation

$$L = \left[(R' + l') \frac{l}{l'} + g \left(\frac{l}{l'} + 1 \right) \right] \frac{i}{I} \frac{\delta}{\alpha} \frac{T}{\sqrt{\pi^2 + \lambda^2}} e^{\frac{\lambda}{\pi} \operatorname{artg} \frac{\pi}{\lambda}},$$

ou, lorsque λ est petit et comme $(R' + l') \frac{l}{l'} = R + l$,

$$L = \left[(R + l) + g \left(\frac{l}{l'} + 1 \right) \right] \frac{i}{I} \frac{\delta}{\alpha} \frac{T}{\pi} \left(1 + \frac{\lambda}{2} \right).$$

Dans cette formule $\frac{i}{\alpha}$ est la constante du galvanomètre; c'est une quantité qu'on peut déterminer une fois pour toutes. Il suffit pour trouver L de faire une seule expérience; le coefficient de self-induction se trouve finalement rapporté à la durée d'oscillation T et aux résistances des branches du pont et du galvanomètre.

Le plus souvent, la résistance du galvanomètre est beaucoup plus considérable que les autres résistances. Dans l'exemple précédent, par exemple, on avait les valeurs suivantes

$$R = l = l' = k = 0,2 \quad \frac{l}{l'} = 1$$

g de 7 à 640 ohms.

Prenons, par exemple, la valeur de $g = 40$ ohms, on aurait pour la quantité entre parenthèses

$$(0,2 + 0,2) 1 + 40(1 + 1) = 80 + 0,4$$

et on voit que, sans commettre une erreur de 1 0/0, on peut négliger le terme

$$(R + l') \frac{l}{l'}$$

devant

$$g \left(\frac{l}{l'} + 1 \right)$$

On trouve, dans ces conditions

$$L = g \left(\frac{l}{l'} + 1 \right) \frac{i}{I} \frac{\delta}{\alpha} \frac{T}{\pi} \left(1 + \frac{\lambda}{2} \right)$$

et la seule résistance qui intervient et qu'il faut connaître exactement, est celle du galvanomètre.

Cette formule est d'un emploi assez commode; cependant, avec des galvanomètres à aimants directeurs, comme les galvanomètres Thomson, la constante $\frac{i}{\alpha}$ varie beaucoup, et on est presque obligé de la déterminer à chaque mesure.

Nous n'insisterons pas plus longtemps sur la détermination du coefficient de self-induction par le galvanomètre périodique. La principale difficulté est, en effet, l'influence directe qu'éprouve le galvanomètre. Ainsi, dans quelques expériences entreprises dans le but de vérifier les résultats obtenus par une autre méthode, résultats relatifs à la machine Gramme, nous avons été obligés de nous mettre à une distance de 10 à 12 mètres de la machine. A cette distance, l'influence de la machine était encore visible, quoique très faible.

Dans ces conditions, les expériences présentent des difficultés presque insurmontables.

La capacité électromagnétique de la bobine dépend de la résistance du circuit extérieur; si la résistance extérieure était égale à celle de la bobine, on aurait

$$C = \frac{L}{r(r+r')} = \frac{L}{2r^2}.$$

Ici

$$r = 0,2 \quad L = 0,00084$$

d'où

$$C = \frac{0,00084}{2 \times 0,04} = 0,01 \text{ farad} = 10\,000 \text{ microfarads}.$$

Si le circuit intérieur, comprenant le galvanomètre, avait 10 ohms de résistance, on aurait :

$$C = \frac{0,00084}{0,2 \times 10,2} = 0,0004 \text{ farad} = 400 \text{ microfarads}.$$

On voit que ces capacités sont extrêmement considérables, d'autant plus qu'il s'agit ici d'une bobine sans fer doux.

Nous n'avons pas réalisé des expériences avec les noyaux de fer doux, car l'électro-aimant affecte trop le galvanomètre pour que les mesures soient possibles. Ces déterminations seront faites avec la méthode, dont nous nous occuperons dans un autre chapitre.

CHAPITRE II

ÉTUDE DU GALVANOMÈTRE APÉRIODIQUE DEPREZ-D'ARSONVAL

On connaît la propriété particulière de ce galvanomètre : il est absolument apériodique, lorsque la résistance du circuit extérieur n'est pas trop considérable. De là le grand avantage qu'il présente pour la mesure des résistances par le pont de Wheatstone, pour la mesure des forces électro-motrices, etc.

Un autre avantage non moins précieux, c'est qu'il est insensible aux masses de fer et aux aimants qui peuvent se trouver dans son voisinage. Il en résulte que ce galvanomètre est d'un emploi très pratique pour l'usage courant ; c'est pour ces raisons que nous avons cherché à l'utiliser dans la détermination du coefficient de self-induction.

Il est évident qu'on peut l'employer, comme tout autre galvanomètre, lorsqu'il s'agit de méthodes de réduction à zéro, comme par exemple de la comparaison de la capacité électro-magnétique d'un électro-aimant à la capacité électro statique d'un condensateur.

La difficulté de l'emploi du galvanomètre apériodique est la complication de l'équation de mouvement du cadre. Il faut en effet comparer une quantité d'électricité à un courant continu ; or, tant que le mouvement de l'aiguille d'un galvanomètre est un mouvement périodique, on a, dans la durée des oscillations, un facteur qui permet la comparaison entre l'angle d'impulsion et l'angle de déviation permanente. Lorsque le mouvement n'est plus périodique, on n'a plus cette ressource et de plus, les constantes du galvanomètre varient d'une manière très compliquée avec la résistance du circuit extérieur.

Étude du galvanomètre apériodique

Ce galvanomètre consiste en un cadre de fil, de forme rectangulaire, mobile dans un champ magnétique intense, produit par un aimant d'acier, (fig. 3 et 4).

Pour renforcer ce champ magnétique, on a placé à l'intérieur du cadre une masse de fer doux, fixe. Le courant est amené par le fil de suspension, et il sort par le fil prolongé au-dessous du cadre.

L'ensemble constitue donc une portion de la machine Siemens ; mais ici le tambour se réduit à une seule section et le fer doux est fixe, au lieu d'être mobile.

L'équation différentielle du mouvement du cadre peut s'établir d'après les considérations suivantes.

Soient :

- θ , l'angle de déviation au temps t ;
 Σmr^2 , le moment d'inertie du cadre;
 τ , le couple de torsion du fil de suspension;
 F , l'intensité du champ magnétique;
 nS , la surface totale du cadre;
 T , la durée d'une oscillation simple du cadre à circuit ouvert;
 R , la résistance totale du cadre, y compris la résistance extérieure.

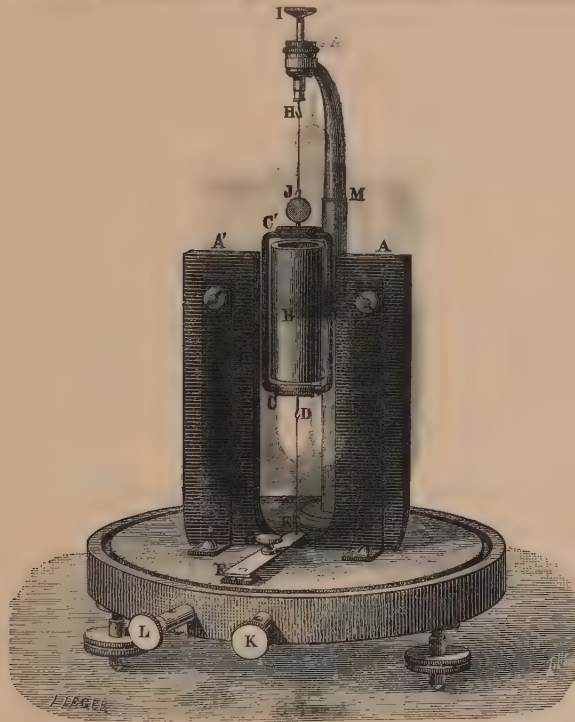


FIG. 3

Nous supposons que toutes ces grandeurs soient évaluées en unités absolues C. G. S.

On aura pour l'équation différentielle du mouvement du cadre

$$\Sigma mr^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2} + A \frac{d\theta}{dt} + \tau \theta = k i$$

i étant l'intensité du courant qui circule dans le cadre;

A et k des constantes que nous allons déterminer.

A est le coefficient des termes qui varient proportionnellement à la vitesse, tels que la résistance de l'air, la réaction due au courant d'induction, etc.

k est l'action du courant $= 1$ sur le cadre mobile.

Il est facile de voir qu'on a :

$$k = F S n$$

En effet, le travail, pour un petit déplacement $d\theta$ du cadre (fig. 5), a pour expression

$$idQ = i F dS = i F S d\theta$$

dQ étant la variation du flux de force. D'autre part ce même travail est égal à

$$k i d\theta$$

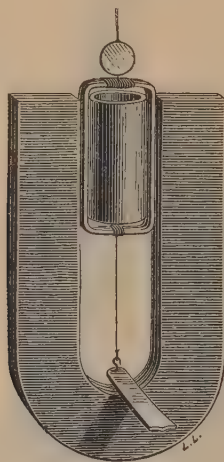


FIG. 4

On a donc

$$k i d\theta = i F S d\theta$$

d'où

$$k = F S$$

Pour n spires il faut multiplier par n .

Donc

$$k = F S n$$

Cherchons maintenant la valeur du coefficient A . Ce coefficient provient de l'influence de l'air, de l'induction du champ magnétique sur le cadre, et de l'amortissement dû à la raideur du fil de suspension.

On peut se convaincre facilement que le seul terme important est dû à l'induction, car à circuit ouvert, où il n'y a pas d'induction, le mouvement est rigoureusement périodique et presque sans amortissement ⁽¹⁾.

Lorsqu'on donne au cadre un petit déplacement angulaire $d\theta$, il circule

⁽¹⁾ Nous donnerons ailleurs quelques valeurs numériques, ce qui montrera que ce terme est négligeable en dehors de l'effet de l'induction.

par l'induction, dans ce cadre, une quantité d'électricité dq , donnée par l'expression

$$dq = \frac{1}{R} dQ = \frac{1}{R} d(FS) = \frac{1}{R} F S n d\theta$$

car l'intensité F du champ magnétique est supposée constante.

L'intensité de ce courant est donnée par l'équation

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{1}{R} F S n \frac{d\theta}{dt}$$

Mais nous avons vu que l'intensité i donne lieu à un couple $i F S n$, ce qui donne dans notre cas

$$\frac{1}{R} F^2 S^2 n^2 \frac{d\theta}{dt}$$

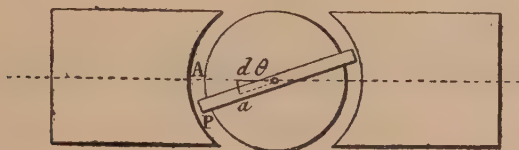


FIG. 5

c'est le terme qui intervient dans l'équation différentielle. Il s'en suit :

$$A = \frac{1}{R} F^2 S^2 n^2$$

L'équation différentielle du mouvement devient donc

$$\sum m r^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{1}{R} F^2 S^2 n^2 \frac{d\theta}{dt} + \tau\theta = F S n i$$

Nous allons voir qu'il est possible de déterminer la valeur de toutes les constantes qui interviennent dans cette formule : on peut donc la soumettre à des vérifications expérimentales.

Pour tenir compte de l'induction du cadre sur lui-même, il faut annuler le second membre de l'équation précédente et déterminer i par l'équation

$$L \frac{di}{dt} + R i + \frac{dQ}{dt} = E$$

si E est la force électromotrice et L le coefficient de self-induction du cadre.

Or, on a

$$\frac{dQ}{dt} = F \frac{dS}{dt} = F S n \frac{d\theta}{dt}$$

On a donc à résoudre le système d'équations différentielles simultanées :

$$\begin{cases} \sum m r^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{1}{R} F^2 S^2 n^2 \frac{d \theta}{dt} + \tau \theta = F S n i \\ L \frac{di}{dt} + R i + F S n \frac{d \theta}{dt} = E \end{cases}$$

L'élimination de i entre ces équations conduit à une équation linéaire du 3^e degré.

Comme la valeur numérique du coefficient L est très petite, on peut, comme première approximation, négliger ce terme et conserver l'équation du second degré.

Nous avons donc à considérer l'équation

$$\sum m r^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{1}{R} F^2 S^2 n^2 \frac{d \theta}{dt} + \tau \theta = F S n i$$

dans laquelle

$$i = \frac{E}{R}$$

Examinons d'abord le cas où l'on abandonne le cadre à lui-même, c'est-à-dire où

$$i = 0$$

On a, dans ce cas

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + 2 a \frac{d \theta}{dt} + b^2 \theta = 0$$

en posant

$$2 a = \frac{F^2 S^2 n^2}{R \sum m r^2} \quad b^2 = \frac{\tau}{\sum m r^2}$$

Cette équation a ceci de particulier, que la réalité des racines dépend de la valeur de la résistance totale R ; on peut, à volonté, en faisant varier la résistance extérieure, rendre les racines de l'équation caractéristique imaginaires ou réelles.

Occupons-nous d'abord du cas où les racines sont imaginaires. On a, dans ce cas, les solutions bien connues :

$$\theta = (M \cos \sqrt{b^2 - a^2} t + N \sin \sqrt{b^2 - a^2} t) e^{-at}$$

On détermine les constantes M et N de telle sorte que pour $t=0$, on a $\theta=\theta_0$ et $\frac{d \theta}{dt}=0$. Cela veut dire que, si l'on écarte le cadre d'un angle θ , et qu'on l'abandonne à lui-même, sans vitesse initiale, on a :

$$\begin{aligned} \theta &= \theta_0 \left(\cos \sqrt{b^2 - a^2} t + \frac{a}{\sqrt{b^2 - a^2}} \sin \sqrt{b^2 - a^2} t \right) e^{-at} \\ \frac{d \theta}{dt} &= -\theta_0 \frac{b^2}{\sqrt{b^2 - a^2}} e^{-at} \sin \sqrt{b^2 - a^2} t \end{aligned}$$

De ces équations on déduit que les oscillations sont isochrones et qu'il y a un rapport constant entre deux valeurs successives de θ . Il suffit, d'ailleurs, d'observer la durée d'une oscillation simple T et le décrement logarithmique $\lambda = \log. \text{ nép. } \frac{\theta_0}{\theta_1}$ pour déduire a et b d'après les formules

$$a = \frac{\lambda}{T} \quad b^2 - a^2 = \frac{\pi^2}{T^2}$$

$$b = \frac{1}{T} \sqrt{\pi^2 + \lambda^2}$$

Si le circuit du cadre était ouvert, on aurait $R = \infty$ et $a = 0$, l'influence de l'air étant négligée. Pour évaluer cette influence, nous allons examiner si on a réellement $a = 0$ lorsque $R = \infty$, c'est-à-dire nous allons déterminer les valeurs de a et de b à circuit couvert.

Le galvanomètre que nous avons employé nous a donné les valeurs suivantes :

$$T = 0,40 \quad \frac{\theta_0}{\theta_1} = 1,009 \quad \lambda = \log. \text{ nép. } \frac{\theta_0}{\theta_1} = 0,0090$$

donc on a

$$a = \frac{\lambda}{T} = 0,023$$

On en déduit

$$b = 7,9$$

Cette influence de l'air est donc complètement négligeable. En effet dans les conditions où nous allons employer le galvanomètre, les racines étant égales ou réelles, et par suite $b = 7,9$, il en résulte que, devant ces valeurs, $0,023$ est une quantité négligeable.

Nous allons maintenant chercher, dans le cas où les racines sont imaginaires, quel est l'angle de déviation permanente α qu'éprouve le cadre sous l'influence d'un courant constant d'intensité i , et quelle est l'impulsion δ sous l'influence du passage d'une quantité d'électricité q .

Dans le premier cas, courant constant, le second membre est

$$\frac{F S n}{\Sigma m r^2} i$$

et on a pour $t = 0$

$$\theta = 0 \quad \text{et} \quad \left(\frac{d\theta}{dt} \right)_0 = 0$$

On trouve, pour la déviation constante, l'expression

$$\alpha = \frac{F S n}{\tau} i$$

En outre, comme, à cadre ouvert, on a

$$\frac{\tau}{\Sigma m r^2} = \frac{\pi^2}{T^2}$$

il vient

$$\alpha = \frac{T^2}{\pi^2} \frac{F S n}{\Sigma m r^2} i$$

Il est à remarquer que cette expression ne dépend pas du coefficient de $\frac{d\theta}{dt}$: elle est indépendante de la résistance totale du circuit et de l'amortissement.

Pour chercher l'impulsion δ correspondant à une quantité d'électricité q , on aura à résoudre l'équation différentielle sans second membre, avec les conditions initiales :

$$t=0 \quad \theta=0 \quad \text{et} \quad \left(\frac{d\theta}{dt}\right)_0 = \frac{F S n}{\Sigma m r^2} q$$

Dans ces conditions, en supposant $a=0$, on a

$$\delta = \frac{F S n}{\sqrt{\tau \Sigma m r^2}} q$$

En éliminant

$$\tau = \frac{\pi^2}{T^2} \Sigma m r^2$$

il vient

$$\delta = \frac{T}{\pi} \frac{F S n}{\Sigma m r^2} q$$

Dans le cas général, le coefficient du second terme de l'équation différentielle n'est pas nul, et on a

$$\delta = \frac{F S n}{\sqrt{\tau \Sigma m r^2}} q e^{-\frac{\lambda}{\pi} \text{artg} \frac{\pi}{\lambda}} = \frac{T}{\sqrt{\pi^2 + \lambda^2}} \frac{F S n}{\Sigma m r^2} e^{-\frac{\lambda}{\pi} \text{artg} \frac{\pi}{\lambda}} q$$

T est la durée d'une oscillation simple, et, on a la relation

$$\sqrt{\frac{\Sigma m r^2}{\tau}} = \frac{T}{\sqrt{\pi^2 + \lambda^2}}$$

On déduit des formules précédentes

$$\frac{q}{i} = \sqrt{\frac{\Sigma m r^2}{\tau}} e^{-\frac{\lambda}{\pi} \text{artg} \frac{\pi}{\lambda}} = \frac{\delta}{\alpha} \frac{T}{\sqrt{\pi^2 + \lambda^2}} e^{-\frac{\lambda}{\pi} \text{artg} \frac{\pi}{\lambda}}$$

Nous allons nous occuper maintenant du cas où les racines de l'équation caractéristique sont réelles. Ce cas est caractérisé par la condition

$$a > b$$

Pour le cas limite, racines égales, on aurait

$$a = b$$

Or,

$$a = \frac{1}{2} \frac{F^2 S^2 n^2}{R \Sigma m r^2} \quad b^2 = \frac{\Sigma m r^2}{r} = \frac{\pi^2}{T^2}$$

T étant ici la durée d'une oscillation simple à cadre ouvert.

On en déduit, pour le cas limite des racines égales, la relation

$$R = \frac{1}{2} \frac{\pi^3}{T^3} \Sigma m r^2 \frac{\alpha^2}{i^2}$$

Pour vérifier cette formule expérimentalement, il faut observer la nature du mouvement: tant que les racines sont imaginaires, le mouvement est oscillatoire, mais, aussitôt que les racines deviennent réelles, le mouvement est tout à fait apériodique. On peut aisément suivre ces transformations en faisant varier la résistance du circuit extérieur.

Les deux facteurs $\frac{\pi}{T}$ et $\frac{\alpha}{i}$ se déterminent sans peine et avec une grande exactitude. Il n'en est pas ainsi pour le moment d'inertie $\Sigma m r^2$ du cadre mobile.

Le plus simple est de faire osciller le cadre à circuit ouvert après l'addition d'une masse de cuivre dont on connaît bien la forme géométrique. Nous donnerons, à la suite, la vérification expérimentale de cette formule.

Lorsque les racines de l'équation caractéristique sont réelles, on a

$$\Sigma m r^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{1}{R} F^2 S^2 n^2 \frac{d\theta}{dt} + \tau \theta = 0 \quad \text{ou} \quad = F S n i$$

ou bien

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + 2a \frac{d\theta}{dt} + b^2 \theta = 0 \quad \text{ou} \quad = \frac{F S n}{\Sigma m r^2} i$$

avec $a > b$.

Ce qu'il nous intéresse de rechercher dans ce cas, c'est encore la déviation permanente α , produite par un courant constant d'intensité i , et l'impulsion δ , due au passage d'une quantité d'électricité q .

L'intensité est toujours reliée à la déviation permanente par la formule

$$\alpha = \frac{F S n}{\tau} i$$

puisque cette relation est indépendante du coefficient a et par conséquent de l'amortissement.

Il en est tout autrement pour ce qui concerne le passage d'une quantité d'électricité: ici les formules deviennent compliquées. Il faut résoudre l'équation différentielle sans second membre et avec les données initiales

$$t=0 \quad \theta=0 \quad \text{et} \quad \left(\frac{d\theta}{dt}\right)_0 = \frac{F S n}{\Sigma m r^2} q$$

On trouve ainsi

$$\theta = A e^{r_1 t} + B e^{r_2 t}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = A r_1 e^{r_1 t} + B r_2 e^{r_2 t}$$

r_1 et r_2 étant les racines de l'équation caractéristique

$$r^2 + 2ar + b^2 = 0$$

ce qui donne

$$r_1 = -a + \sqrt{a^2 - b^2} \quad r_2 = -a - \sqrt{a^2 - b^2}$$

Pour déterminer les constantes A et B, on a

$$0 = A + B$$

$$\frac{F S n}{\Sigma m r^2} q = A r_1 + B r_2$$

d'où

$$A = \frac{F S n q}{(r_1 - r_2) \Sigma m r^2} \quad B = -\frac{F S n q}{(r_1 - r_2) \Sigma m r^2}$$

En substituant ces valeurs, on trouve

$$\theta = \frac{F S n q}{(r_1 - r_2) \Sigma m r^2} (e^{r_1 t} - e^{r_2 t})$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{F S n q}{(r_1 - r_2) \Sigma m r^2} (r_1 e^{r_1 t} - r_2 e^{r_2 t})$$

Pour calculer l'angle δ correspondant à q , il suffit de faire $\frac{d\theta}{dt} = 0$, d'où

$$r_1 e^{r_1 t} - r_2 e^{r_2 t} = 0$$

équation dans laquelle

$$t = \frac{1}{r_1 - r_2} \log \text{nép} \frac{r_2}{r_1}$$

On a ainsi

$$\delta = \frac{F S n q}{(r_1 - r_2) \Sigma m r^2} (e^{r_1 t} - e^{r_2 t})$$

Ces deux dernières équations contiennent la solution du problème cherché. Ces équations, compliquées comme on le voit, contiennent la résistance totale R, qui entre dans a et par suite dans r_1 et r_2 , mais ces relations ne ressortent pas au premier abord. On a

$$\left\{ \begin{array}{l} a = \frac{1}{2} \frac{F^2 S^2 n^2}{R \Sigma m r^2} = \frac{1}{2} \frac{\pi^4}{T^4} \frac{\alpha^2}{i^2} \frac{\Sigma m r^2}{R} \\ b = \sqrt{\frac{\tau}{\Sigma m r^2}} = \frac{\pi}{T} \end{array} \right.$$

$$r_1 = -a + \sqrt{a^2 - b^2} \quad r_2 = -a - \sqrt{a^2 - b^2}$$

Il faut déterminer $\frac{\pi}{T}$, $\frac{\alpha}{i}$ et $\Sigma m r^2$ pour pouvoir calculer la solution complète; le terme F S n s'élimine.

On a, en effet

$$F S n = \frac{\pi^2}{T^2} \frac{\alpha}{i} \Sigma m r^2$$

d'où

$$\left\{ \begin{aligned} \delta &= \frac{\pi^2}{T^2} \frac{\alpha}{i} \frac{1}{r_1 - r_2} (e^{r_1 t} - e^{r_2 t}) \\ t &= \frac{1}{r_1 - r_2} \log \operatorname{nép} \frac{r_2}{r_1} \end{aligned} \right.$$

On voit que, tant que R reste invariable, δ est proportionnel à q (δ étant toujours petit) : il suffit donc de connaître le facteur de proportionnalité pour chaque valeur de R, si on veut avoir la solution complète du problème qui nous occupe.

Nous allons traiter maintenant le cas où les racines de l'équation caractéristique sont égales. Ce cas est particulièrement intéressant pour les applications, car on trouve des solutions très simples et des calculs faciles à effectuer. La valeur de la résistance totale qui correspond à ce cas limite se trouve d'après la relation

$$R = \frac{1}{2} \frac{\pi^3}{T^3} \sum m r^2 \frac{\alpha^2}{i^2}$$

Dans ce cas on a à résoudre l'équation différentielle

$$\sum m r^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{1}{R} F^2 S^2 n^2 \frac{d\theta}{dt} + \tau \theta = 0 \quad \text{ou} = F S n i$$

ou

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + 2a \frac{d\theta}{dt} + b^2 \theta = 0 \quad \text{ou} = \frac{F S n}{\sum m r^2} i$$

dans laquelle $a = b$.

Dans le cas d'une impulsion produite par le passage d'une quantité d'électricité q , il faut prendre les équations sans second membre et on a comme précédemment les conditions initiales :

$$t = 0 \quad \theta = 0 \quad \left(\frac{d\theta}{dt} \right)_0 = \frac{F S n}{\sum m r^2} q$$

On en déduit

$$\theta = \frac{F S n}{\sum m r^2} q t e^{-at}$$

Pour trouver l'angle d'impulsion, il faut d'abord faire $\frac{d\theta}{dt} = 0$, ce qui donne :

$$1 - at = 0 \quad t = \frac{1}{a}$$

et, comme

$$a = b = \frac{\pi}{T}$$

$$t = \frac{T}{\pi}$$

$$\delta = \frac{F S n}{\sum m r^2} q \frac{T}{\pi} \frac{1}{e}$$

Comme on a d'ailleurs,

$$F S n = \frac{\pi^2}{T^2} \frac{\alpha}{i} \Sigma m r^2$$

Il s'en suit :

$$\delta = \frac{\alpha}{i} \frac{\pi}{T} \frac{1}{e} q \quad \text{ou} \quad q = \frac{T}{\pi} e \frac{i}{\alpha} \delta$$

Cette dernière expression est très remarquable : nous l'emploierons bientôt pour la détermination du coefficient de self-induction.

L'ensemble de ces formules relatives au galvanomètre apériodique Deprez d'Arsonval se prête à des vérifications nombreuses et variées. En dehors des formules que nous avons déjà trouvées et qui toutes peuvent être vérifiées par l'expérience, on peut se proposer, par exemple, de reconnaître comment le décrement logarithmique dépend de la résistance extérieure. On a

$$a = \frac{\lambda}{T} \frac{T}{\pi \sqrt{\pi^2 + \lambda^2}}$$

avec

$$2a = \frac{F^2 S^2 n^2}{R \Sigma m r^2}$$

et

$$F S n = \frac{\pi^2}{T^2} \Sigma m r^2 \frac{\alpha}{i}$$

d'où

$$\frac{\pi}{\lambda} = \sqrt{\left(2 \frac{T^3}{\pi^3} \frac{i^2}{\alpha^2} \frac{R}{\Sigma m r^2}\right)^2 - 1}$$

Dans cette formule, R est la résistance totale du circuit et T la durée d'une oscillation simple à cadre ouvert.

Nous résumons ici dans un tableau les formules relatives à l'angle d'impulsion due au passage d'une quantité d'électricité q.

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{T}{\pi} \frac{F S n}{\Sigma m r^2} q && \text{circuit ouvert sans amortissement} \\ \delta &= \frac{T}{\pi} \frac{F S n}{\Sigma m r^2} e^{-\frac{\lambda}{\pi} \text{artg} \frac{\pi}{\lambda}} q && \text{racines imaginaires} \\ \delta &= \frac{T}{\pi} \frac{F S n}{\Sigma m r^2} \frac{1}{e} q && \text{racines égales} \\ \delta &= \frac{F S n}{\Sigma m r^2} \frac{e^{r_1 t} - e^{r_2 t}}{r_1 - r_2} q && \left. \begin{array}{l} \text{avec} \\ t = \frac{1}{r_1 - r_2} \log \text{nép} \frac{r_2}{r_1} \end{array} \right\} \text{racines réelles} \end{aligned}$$

Dans ces formules, on a

$$\begin{aligned} F S n &= \frac{\pi^2}{T^2} \frac{\alpha}{i} \Sigma m r^2 \\ a &= \frac{1}{2} \frac{F^2 S^2 n^2}{R \Sigma m r^2} = \frac{1}{2} \frac{\pi^4}{T^4} \frac{\alpha^2}{i^2} \frac{\Sigma m r^2}{R} \\ b &= \sqrt{\frac{\tau}{\Sigma m r^2}} = \frac{\pi}{T} \\ r_1 &= -a + \sqrt{a^2 - b^2} \quad r_2 = -a - \sqrt{a^2 - b^2} \end{aligned}$$

La condition qui exprime que les racines sont égales est :

$$R = \frac{1}{2} \frac{\pi^3}{T^3} \frac{\alpha^2}{i^2} \Sigma m r^2$$

Lorsque, dans les formules précédentes, on fait décroître R depuis l'infini jusqu'à sa valeur limite, qui est celle de la résistance du galvanomètre, on voit que, pour la même valeur de q , δ décroît jusqu'à une certaine valeur limite. Dès qu'on connaît les constantes du galvanomètre, on peut effectuer le calcul dans chaque cas. Ces constantes sont au nombre de trois :

- 1° La durée T d'une oscillation simple à cadre ouvert;
- 2° La constante du galvanomètre $\frac{\alpha}{i}$, c'est-à-dire la déviation constante α évaluée en valeur circulaire, produite par un courant d'intensité i . Ordinairement on prend

$$i = 1 \text{ micro-ampère} = 10^{-6} \text{ amp.} = 10^{-7} \text{ Unités C. G. S.}$$

- 3° Le moment d'inertie $\Sigma m r^2$ du cadre mobile.

Influence du coefficient de self-induction du cadre mobile.

Nous avons trouvé les deux équations simultanées :

$$\begin{aligned} \Sigma m r^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{1}{R} F^2 S^2 n^2 \frac{d \theta}{dt} + \tau \theta &= F S n i \\ L \frac{di}{dt} + R i + F S n \frac{d \theta}{dt} &= 0 \quad \text{ou} \quad = E \end{aligned}$$

Dans les cas qui nous occupent, où l'on cherche l'angle d'impulsion dû à une décharge électrique, on a $E = 0$.

En éliminant l'intensité i entre ces deux équations, on trouve l'équation du 3^e degré :

$$L \frac{d^3 \theta}{dt^3} + R \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \left(\frac{\tau L}{\Sigma m r^2} + \frac{F^2 S^2 n^2}{\Sigma m r^2} \right) \frac{d \theta}{dt} + \frac{R \tau}{\Sigma m r^2} \theta = 0$$

A circuit ouvert, le coefficient de self-induction L est nul : on a, dans ce cas,

$$\frac{\tau}{\Sigma m r^2} = \frac{\pi^2}{T^2}$$

T, durée d'une oscillation simple à circuit ouvert.

La déviation constante α est toujours reliée de la même façon aux autres facteurs, et on a

$$F S n = \frac{\pi^2}{T^2} \frac{\alpha}{i} \Sigma m r^2$$

En substituant ces valeurs dans l'équation précédente, on a :

$$L \frac{d^3 \theta}{dt^3} + R \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \left(L \frac{\pi^2}{T^2} + \frac{\pi^4}{T^4} \frac{\alpha^2}{i^2} \Sigma m r^2 \right) \frac{d \theta}{dt} + R \frac{\pi^2}{T^2} \theta = 0$$

Comme tous les facteurs qui interviennent dans cette équation sont connus, on peut trouver la solution dans chaque cas particulier. Dans notre cas, les constantes doivent être déterminées d'après les conditions initiales :

$$t = 0 \quad \theta = 0 \quad \left(\frac{d \theta}{dt} \right)_0 = \frac{F S n}{\Sigma m r^2} q = \frac{\pi^2}{T^2} \frac{\alpha}{i} q \quad \left(\frac{d^2 \theta}{dt^2} \right)_0 = 0$$

Pour trouver l'impulsion δ correspondant au passage d'une quantité d'électricité q , il faudrait chercher le temps t pour lequel $\frac{d \theta}{dt} = 0$ et substituer cette valeur de t dans l'équation qui donne θ . Ainsi, si r_1 , r_2 et r_3 sont les racines de l'équation caractéristique

$$L r^3 + R r^2 + \left(L \frac{\pi^2}{T^2} + \frac{\pi^4}{T^4} \frac{\alpha^2}{i^2} \Sigma m r^2 \right) r + R \frac{\pi^2}{T^2} = 0$$

on aura

$$\begin{aligned} \theta &= C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} + C_3 e^{r_3 t} \\ \frac{d \theta}{dt} &= C_1 r_1 e^{r_1 t} + C_2 r_2 e^{r_2 t} + C_3 r_3 e^{r_3 t} \\ \frac{d^2 \theta}{dt^2} &= C_1 r_1^2 e^{r_1 t} + C_2 r_2^2 e^{r_2 t} + C_3 r_3^2 e^{r_3 t} \end{aligned}$$

Pour déterminer les constantes, on a :

$$\begin{aligned} 0 &= C_1 + C_2 + C_3 \\ \frac{\pi^2}{T^2} \frac{\alpha}{i} q &= C_1 r_1 + C_2 r_2 + C_3 r_3 \\ 0 &= C_1 r_1^2 + C_2 r_2^2 + C_3 r_3^2 \end{aligned}$$

Pour trouver l'impulsion δ on aurait :

$$\delta = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} + C_3 e^{r_3 t}$$

avec

$$0 = C_1 r_1 e^{r_1 t} + C_2 r_2 e^{r_2 t} + C_3 r_3 e^{r_3 t}$$

Ces équations sont trop compliquées pour pouvoir être employées dans la pratique. La deuxième surtout contient l'inconnue t sous une forme transcendante et qui ne se prête à aucune solution générale.

Nous ne nous occuperons donc pas du cas général, mais nous supposons que le coefficient de self-induction L soit très petit, et nous analyserons spécialement ce qui arrive lorsque deux racines sont égales.

Supposons donc que l'équation différentielle se réduise à la suivante

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \left(\frac{L}{R} \frac{\pi^2}{T^2} + \frac{\pi^4}{T^4} \frac{\alpha^2}{i^2} \frac{\Sigma mr^2}{R} \right) \frac{d\theta}{dt} + \frac{\pi^2}{T^2} \theta = 0$$

et cherchons quelle est la condition pour que les deux racines soient égales.

On a, pour cela, la condition :

$$\left(\frac{L}{R} \frac{\pi^2}{T^2} + \frac{\pi^4}{T^4} \frac{\alpha^2}{i^2} \frac{\Sigma mr^2}{R} \right)^2 = 4 \frac{\pi^4}{T^4}$$

d'où

$$R = \frac{1}{2} \frac{\pi^3}{T^3} \frac{\alpha^2}{i^2} \Sigma mr^2 + \frac{1}{2} \frac{\pi}{T} L$$

Où, nous avons vu qu'en négligeant le coefficient de self-induction L, on avait lorsque les racines étaient égales,

$$R = \frac{1}{2} \frac{\pi^3}{T^3} \frac{\alpha^2}{i^2} \Sigma mr^2$$

On voit donc que l'induction du cadre sur lui-même, augmente cette valeur de R de la quantité

$$\frac{1}{2} \frac{\pi}{T} L$$

Les expériences vérifient cette formule, en ce sens que la valeur de R, donnée par l'expérience est ordinairement supérieure à la valeur calculée d'après la formule :

$$R = \frac{1}{2} \frac{\pi^3}{T^3} \frac{\alpha^2}{i^2} \Sigma mr^2$$

Pour les galvanomètres que nous avons examinés, la valeur de L est trop petite, pour que l'influence sur R soit sensible, d'autant plus qu'il est difficile de déterminer cette valeur de R avec une grande approximation. En tout cas la faible valeur de L montre qu'on est autorisé à négliger ce terme et à employer l'équation du second degré.

Vérifications expérimentales des formules précédentes.

Nous avons employé à cet effet deux galvanomètres Deprez-d'Arsonval de différents modèles. L'un de ces galvanomètres était construit avec des électro-aimants. Ce dernier galvanomètre, à la construction duquel M. Carpentier a apporté une extrême obligeance, permet de vérifier les formules dans une étendue bien plus vaste, car on peut faire varier à volonté, l'intensité du champ magnétique.

Les quantités qui interviennent dans les formules précédentes sont :

1° La durée d'une oscillation simple :

Cette durée se détermine avec une grande exactitude. Avec un compteur à pointage, on compte 50 oscillations. Les expériences montrent que le

résultat est exact à une fraction de seconde près, et que l'erreur relative ne dépasse pas un centième. Il faudrait avoir égard à l'amortissement, car la durée T qui intervient dans les formules, se rapporte au cas où il n'y a pas d'amortissement.

Ce qu'on observe, en réalité, à cadre ouvert est la durée T' lorsqu'il a un faible amortissement dû à la résistance de l'air. Si λ est le décrément logarithmique, on a la relation :

$$T = \frac{T'}{\sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{\pi^2}}}$$

Dans une série d'expériences, on a trouvé que pour 10 oscillations, l'élongation diminue de 8,4 à 6,6, ce qui donne pour le décrément logarithmique

$$\lambda = \frac{1}{10} \log \text{nép} \frac{8.4}{6.6} = 0.024$$

On voit donc que cette correction n'a aucune influence sensible sur la valeur de T , et il est inutile de s'en occuper.

2° La deuxième constante qu'il faut déterminer est la constante du galvanomètre, $\frac{\alpha}{i}$. Cette détermination se fait à la manière ordinaire avec une grande approximation; il suffit de disposer d'une bonne boîte de résistances et d'une pile dont on connaît bien la force électro-motrice. A cet effet, nous avons pris un élément Daniell, dont la force électro-motrice avait été déterminée directement par comparaison à un élément Latimer Clark. Il faut, pour avoir α en mesure circulaire, diviser la déviation obtenue par le double de la distance de l'échelle au miroir mobile. Pour les galvanomètres que nous avons employés, cette constante était d'environ 2 millimètres pour un micro-ampère, l'échelle étant placée à une distance de 940 millimètres.

On a, dans ces conditions :

$$\frac{\alpha}{i} = \frac{2}{2 \times 940} \times 10^7 \text{ C. G. S.}$$

3° Le moment d'inertie du cadre mobile. C'est l'élément dont la détermination offre le plus de difficulté. La méthode que nous avons employée est la méthode de Gauss. Elle consiste à ajouter au corps dont on cherche le moment d'inertie, d'autres solides dont le moment d'inertie soit bien connu.

Nous avons choisi des anneaux cylindriques, parce que ce sont les corps dont le moment d'inertie, à poids égal, est maximum. Nous avons d'ailleurs vérifié directement, par l'expérience, que le moment du couple de torsion est indépendant du poids suspendu au cadre, conformément à la loi de Coulomb.

Voici les nombres qu'on a trouvés pour le galvanomètre Deprez d'Ar-

sonval à aimants d'acier, galvanomètre dont la résistance était de 222,02 ohms à 16 degrés.

Pour déterminer la durée d'une oscillation simple, on a observé plusieurs séries concordantes; la moyenne a fourni le nombre $T = 0^s,385$ avec une erreur relative ne dépassant pas 1 0/0.

On a trouvé d'ailleurs que, pour de grandes amplitudes, la durée est un peu plus longue que pour des amplitudes très petites. Ainsi, pour de grandes amplitudes, on a trouvé $0^s,388$ et pour de petites $0^s,382$.

La constante du galvanomètre a été trouvée 1,93 m.m. pour un courant d'une intensité d'un micro-ampère, l'échelle étant placée à 940 millimètres.

Pour déterminer le moment d'inertie, on a fait osciller le cadre avec quatre anneaux additionnels. Le tableau suivant donne les dimensions des anneaux et les durées d'oscillations: la dernière colonne, contenant le moment d'inertie du cadre, a été calculé d'après la formule

$$\Sigma mr^2 = MR \frac{1}{\left(\frac{T'}{T}\right)^2 - 1}$$

dans laquelle $T = 0^s,385$.

ANNEAU	POIDS M	RAYON moyen en c. m. R	DURÉE d'une oscillation simple T'	MOMENT d'inertie du cadre
N° 1	3gr 772	1 362	0 ^s 419	11 94 C. G. S.
N° 2	4 900	1 370	0 425	11 96 »
N° 3	8 450	1 304	0 448	11 62 »
N° 5	9 254	1 302	0 518	11 50 »

On voit que les valeurs trouvées pour le moment d'inertie du cadre ne sont pas tout à fait concordantes; cependant l'erreur relative de la moyenne ne dépasse guère 1/50. Cette valeur moyenne est

$$\Sigma mr^2 = 11,75 \text{ C. G. S.}$$

C'est cette valeur que nous adopterons dans les calculs suivants.

En calculant, avec les valeurs ainsi trouvées, la valeur de R, d'après la formule

$$R = \frac{1}{2} \frac{\pi^3 \alpha^2}{T^3} \Sigma mr^2$$

on trouve

$$R = 336 \times 10^9 \text{ C. G. S.} = 336.9 \text{ ohms}$$

Or, la résistance du galvanomètre est de 222 ohms, il reste donc, pour la résistance extérieure 115 ohms. L'expérience a montré qu'avec une résistance extérieure de 120 ohms, l'image dépassait légèrement le zéro,

lorsqu'on avait écarté le cadre de sa position d'équilibre, tandis qu'avec une résistance de 110 ohms, le galvanomètre était apériodique.

On peut donc adopter, pour la résistance qui correspond à l'égalité des racines, la valeur moyenne, soit 115 ohms. C'est donc exactement le même nombre que celui déduit du calcul, mais il faut ajouter que cette concordance parfaite est un peu fortuite, car nous l'avons déjà dit, il est difficile de déterminer R par l'expérience avec une approximation supérieure de 5 à 10 ohms.

Voyons maintenant si les formules qui se rapportent aux décharges se vérifient également. Il faut que le rapport des déviations correspondantes aux cas où le cadre est ouvert et fermé sur la résistance R soit égal au nombre e , base des logarithmes népériens.

La décharge d'un condensateur, d'une capacité de 0,4 de microfarad, chargé à un potentiel d'environ 50 volts, produit une déviation de 11,5 c.m. à circuit ouvert, c'est-à-dire en déchargeant le condensateur directement à travers le galvanomètre sans faire intervenir aucune résistance auxiliaire.

La résistance d'isolement d'un condensateur étant toujours un nombre très considérable, on peut pratiquement supposer que la résistance extérieure est infinie, c'est-à-dire que le circuit du cadre est ouvert; on sait que, dans ces conditions, le galvanomètre est presque rigoureusement dépourvu d'amortissement.

Comme deuxième expérience, on a d'abord augmenté la capacité du condensateur; on a porté cette capacité de 0,4 microfarad à 1 microfarad, puis on a introduit une dérivation ou shunt dans le circuit du galvanomètre, de telle façon que la résistance totale du circuit devient égale à R. Dans notre cas, il faut que la résistance du shunt soit de 115 ohms.

Le condensateur étant chargé au même potentiel que dans le premier cas, on a noté la déviation produite. Pour réduire la déviation à celle qu'on aurait obtenue sans shunt, il suffit de multiplier la déviation par le rapport

$$\frac{r}{r+g}$$

où r est la résistance du shunt et g la résistance du galvanomètre.

Dans notre expérience, on avait

$$r = 115 \text{ ohms} \quad g = 222 \text{ ohms}$$

et

$$r + g = R = 337 \text{ ohms}$$

Le facteur de réduction est donc

$$\frac{115}{337}$$

En tenant compte de ce facteur, on trouve que l'impulsion, sans shunt, aurait été de 11,4 c.m. Le rapport des déviations est donc $\frac{11,5 \times 2,5}{11,4}$

$=2,52$ au lieu de $e=2,72$. L'accord n'est pas très juste, comme on le voit; néanmoins, l'expérience semble être d'accord avec la théorie.

Parmi les causes qui peuvent influencer sur ce résultat, il y en a une surtout que nous tenons à signaler : c'est l'inégalité du rapport qu'on considère, inégalité provenant de l'introduction du shunt.

Le facteur de réduction est, comme nous venons de le voir, $\frac{115}{337}$ ou $1/3$ environ; puis le facteur e augmente le rapport de $\frac{1}{2,7}$, c'est-à-dire

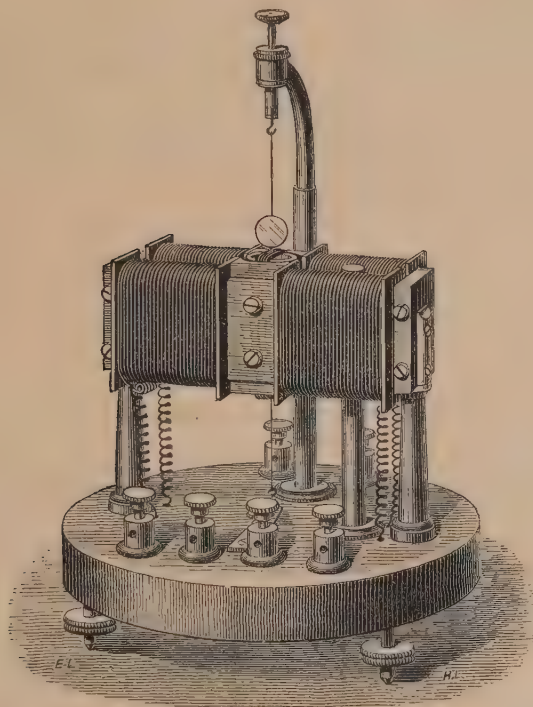


FIG. 5

que le rapport des impulsions devient finalement $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2,7} = \frac{1}{8}$ environ.

Il faut donc comparer deux nombres dont l'un est plus de 8 fois plus grand que l'autre, ce qui est toujours une circonstance désavantageuse.

Nous avons vu que l'erreur relative dans la détermination du moment d'inertie est à peu près $1/50$; multipliant cette valeur par 8, on a $1/6$ environ pour l'erreur probable sur le rapport. Or, en diminuant $e=2,72$ de $1/6$, on trouve $2,27$ valeur bien inférieure au nombre trouvé $2,52$. L'erreur n'est que de $1/12$ environ, ce qui n'a rien qui doive nous surprendre dans les conditions de l'expérience.

Galvanomètre Deprez-d'Arsonval à électro-aimants

Dans le but de vérifier sur une plus vaste étendue, les formules exposées plus haut, nous avons employé un galvanomètre apériodique pourvu d'électro-aimants au lieu d'aimants d'acier. Le cadre mobile a les mêmes dimensions que dans les galvanomètres ordinaires; la forme des électro-aimants est la même que dans la machine dynamo-électrique de Siemens. Les proportions aussi ont été conservées autant que possible.

Avec ce galvanomètre on a l'avantage de pouvoir faire varier à volonté l'intensité du champ magnétique, ce qui permet de vérifier les formules dans de meilleures conditions.

Voici quelques données sur la construction de ce galvanomètre.

Le cadre a 285 tours avec une résistance de 123 ohms. Les bobines des aimants inducteurs sont formées par du fil de 1 millimètre de diamètre. Chaque bobine a 6 couches et 248 tours, la résistance totale des inducteurs en tension étant 2,48 ohms.

Moment d'inertie du cadre mobile

La durée d'une oscillation simple est

$$T = 0.2915$$

On a fait osciller le cadre avec des anneaux en cuivre, ce qui donne lieu au tableau suivant :

ANNEAU	POIDS M	RAYON moyen en c. m. R	DURÉE d'une oscillation T'	MOMENT d'inergie du cadre
N° 1	35r 772	1 362	0s 419	6 566 C. G. S.
N° 8	4 455	1 309	0 425	6 778 »
N° 2	4 900	1 370	0 448	6 744 »
N° 4	8 450	1 304	0 518	6 660 »

La moyenne de ces valeurs est

$$\Sigma mr^2 = 6.687 \text{ C. G. S.}$$

L'écart entre cette valeur moyenne et les valeurs extrêmes est d'environ 1/50.

Sensibilité

Nous avons déterminé la constante pour les différentes valeurs de

l'intensité du courant circulant dans les électro-aimants; l'échelle étant placée à 99,6 c. m., nous avons trouvé les valeurs suivantes :

	amp.	amp.	amp.	amp.
Courant dans les électros	I = 0,53	1,00	1,97	3,20
Constante pour 10 ⁻⁶ amp.	0,60	1,09	1,83	2,21

On voit qu'à partir de deux ampères, les électros commencent à être saturés, car l'intensité du champ magnétique n'est plus proportionnelle au courant inducteur. Nous reviendrons sur ce point dans un autre chapitre.

En calculant la résistance R, pour le cas où les racines deviennent égales, d'après la formule :

$$R = \frac{1}{2} \frac{\pi^3}{T^3} \frac{\alpha^2}{i^2} \Sigma m r^2$$

on trouve :

	amp.	amp.	amp.	amp.
I =	0,53	1,00	1,97	3,20
	ohms.	ohms.	ohms.	ohms.
R calculé.....	38	125	353	515
R observé.....	—	143	373	523
Résistance extérieure..	nég.	20	250	400

Dans le premier cas le galvanomètre est périodique pour toutes les valeurs de la résistance extérieure. L'accord devient d'autant plus satisfaisant que l'intensité du champ magnétique augmente. Dans le dernier cas surtout, l'erreur n'est que de 8/500; cette erreur est de l'ordre de grandeur de celle qui peut se produire dans la détermination du moment d'inertie du cadre.

Il reste à exposer comment se vérifient les formules relatives aux décharges d'un condensateur.

Voici les nombres trouvés :

	I =	amp.	amp.
Décharge de 1 Microfarad sans		1,00	1,97
		c.m.	c.m.
shunt.....		20,6	34,8
		ohms.	c.m.
Décharge rapportée au shunt de 10	10	1,56	230
Décharge observée.....		0,6	8,4
Rapport (e).....		2,6	2,68

Ces derniers nombres s'accordent assez bien avec la théorie pour qu'on puisse se servir de ces formules dans la pratique.

Dans ce qui précède nous avons, pour vérifier les formules, déchargé un condensateur à travers le galvanomètre et nous nous sommes servi d'un shunt. Il reste à voir si l'introduction d'une capacité n'a aucune influence sur le mouvement du cadre et si on peut considérer la décharge

comme s'effectuant d'une manière instantanée par rapport au mouvement rapide du cadre.

Les constantes qui permettent de juger le mouvement du cadre sont la durée d'une oscillation et le decrément logarithmique. Nous avons déterminé ces deux constantes pour le même galvanomètre Deprez-d'Arsonval dans deux cas différents : 1° à circuit ouvert, et 2° une capacité étant intercalée dans le circuit.

Voici les résultats de ces expériences :

Galvanomètre Deprez-d'Arsonval, circuit ouvert :

$$T = 0^s,410 \quad \lambda = \frac{1}{20} \log \text{nép} \frac{40}{35} = 0,0065$$

Avec une capacité de 2 microfarads :

$$T = 0^s,413 \quad \lambda = \frac{1}{20} \log \text{nép} \frac{50}{44} = 0,0065$$

On voit donc que l'introduction de cette capacité n'a aucune influence sensible sur le mouvement du cadre.

Influence de la durée des décharges.

Si on représente par t la durée de la charge ou de la décharge au n^{me} de sa valeur, on a la formule

$$t = CR \log \text{nép} n$$

C étant la capacité exprimée en farads ;

R — résistance — ohms.

Considérons le temps nécessaire pour que la charge ou la décharge soit complète au $1/100$ de sa valeur, on aura

$$t = CR \log \text{nép} 100 = 4,6 CR$$

Pour obtenir des durées comparables à la durée d'oscillations, il faut que la résistance R soit grande. Ainsi, on a pour une résistance de 40000 ohms, avec 1 microforad $t = 0^s,18$ et avec 2 microforads $t = 0^s,37$.

Dans le tableau suivant nous donnons le résumé de ces expériences, t étant la durée de la décharge et T la durée d'une oscillation du galvanomètre à cadre ouvert.

Il résulte de ce tableau que l'influence dépasse 15 0/0 lorsque la durée de la décharge est de même grandeur que la durée d'une oscillation du cadre ; que l'influence descend à 5 0/0 lorsque la durée de la décharge est la moitié de la durée d'une oscillation ; qu'elle n'est plus que de 1 0/0 lorsque le rapport des durées est de 5 environ et que l'influence devient insensible lorsque la durée de la décharge dure moins que le dixième d'une oscillation.

Pour des électro-aimants, dont la capacité électromagnétique est considérable, cette influence peut être très réelle pour la charge : pour la décharge on ne constate aucune différence.

Un dernier point à établir, c'est la question du shunt : il s'agit de voir si le partage de l'électricité se fait dans les expériences que nous avons rapportées, comme si les résistances étaient rectilignes,

Pour cela nous avons réalisé l'expérience suivante : la décharge du

$\frac{T}{t}$	T	DIFFÉRENCE p. 100
1 11	0 ^s 41	15 6
1 12	0 40	15 0
2 22	0 41	5 7
2 3	0 85	4 2
2 22	0 40	4 5
2 27	0 817	4 5
2 27	0 817	5 1
3 6	1 31	1 7
4 54	0 817	1 4
4 54	0 817	1 3
7 2	1 31	0 5
2 22	0 40	0
4 54	0 817	0
7 2	1 31	0

condensateur était faite en employant comme shunt, un autre galvanomètre Deprez-d'Arsonval dont on maintenait le cadre immobile. On a constaté ainsi une certaine impulsion, puis on a remplacé le cadre immobile par une résistance rectiligne égale, et on a observé la même déviation. Cette expérience montre donc que le partage de l'électricité se fait comme si le cadre était dépourvue de self-induction, ou que s'il y a une influence, elle est trop petite pour être observée.

CHAPITRE III

EMPLOI DU GALVANOMÈTRE APÉRIODIQUE DEPREZ-D'ARSONVAL POUR LA MESURE DU COEFFICIENT DE SELF-INDUCTION

Dans le chapitre précédent, nous avons vu qu'il existe une résistance particulière pour laquelle l'équation différentielle du mouvement du cadre admet des solutions simples.

C'est la résistance :

$$R = \frac{1}{2} \frac{\pi^3}{T^3} \frac{\alpha^2}{i^2} \Sigma m r^2$$

pour laquelle les racines de l'équation sont égales et d'après laquelle on aurait par conséquent :

$$\delta = \frac{\pi}{T} \frac{\alpha}{i} \frac{1}{e} q$$

Ce cas particulier fournit un moyen très élégant de déterminer le coefficient de self-induction. Il suffit, en effet, de mesurer expérimentalement la résistance qu'il faut donner au circuit du galvanomètre pour que les racines deviennent égales, c'est-à-dire la résistance qui supprime toute oscillation. Cette résistance une fois connue, on fait en sorte qu'elle reste égale à elle-même dans chaque expérience, ce qui est facile à réaliser par l'introduction d'une boîte de résistances. Puis on détermine le coefficient de self-induction par les méthodes que nous avons exposées précédemment.

Les expériences que nous avons rapportées, dans le chapitre précédent, relativement à l'étude du galvanomètre apériodique, montrent que, par suite de l'accord entre la théorie et les résultats numériques, on peut compter sur une approximation d'environ 1/20, dans la *valeur absolue*, et de 1/100, dans la *valeur relative*.

Des expériences directes, faites en vue de la détermination du coefficient de self-induction, (expériences dont les détails se trouvent à la fin de ce chapitre), permettent de constater que l'erreur relative ne dépasse pas ces limites.

Nous allons exposer brièvement les deux méthodes que nous avons employées. La première repose sur l'emploi d'une résistance additionnelle et la deuxième est une méthode directe qui ne comporte qu'une seule observation.

1° Méthode fondée sur l'emploi d'une résistance additionnelle

On établit l'équilibre du pont; on relève la clef de la pile et on observe l'impulsion δ du galvanomètre. Nous ferons remarquer qu'on

arrive facilement à noter cette impulsion, même dans le cas où les oscillations sont très rapides. Il suffit de remplacer le fil par une fente étroite, et, après un ou deux essais, on arrive nettement à observer l'impulsion, même quand la durée des oscillations ne dépasse pas une demi-seconde.

On fait alors une deuxième observation : on note la déviation permanente α , due à un courant constant i , qu'on a produit par l'introduction d'une résistance additionnelle r , ajoutée à la résistance de la bobine dont on cherche le coefficient de self-induction. On a dans ce cas :

$$L = r \frac{\int i dt}{i} = r \frac{T}{\pi} e \frac{\delta}{\alpha}$$

Cette formule, d'une grande simplicité, est analogue à celle qui correspond au cas d'un galvanomètre périodique sans amortissement, pourvu qu'on multiplie cette dernière par e .

Il suffit, dans ce cas, d'observer la durée T , d'une oscillation simple

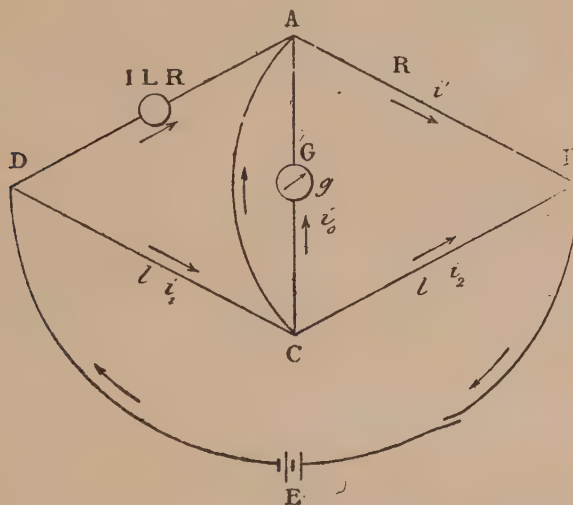


FIG. 7

à circuit ouvert, et de donner au circuit total du galvanomètre une résistance telle que les oscillations soient apériodiques, tout en étant sur le point de devenir périodiques.

La détermination d'un coefficient de self-induction, n'est guère plus compliquée; dans ces conditions, que la mesure de la résistance de la bobine et on peut toujours effectuer les deux mesures simultanément.

Il reste à examiner comment on peut réduire les impulsions lorsqu'elles sont trop considérables et qu'elles sortent de l'échelle. Nous avons constaté que, quand on emploie un galvanomètre ordinaire à faible résistance, il convient d'intercaler des résistances dans le circuit du galvanomètre; mais, la

résistance totale du circuit galvanométrique devant ici rester la même, il faut employer un shunt.

Nous allons calculer de quelle façon les formules se trouvent modifiées par l'introduction de ce shunt.

Pour ne rien négliger dans ce calcul, nous procédons comme nous l'avons fait pour l'établissement de la formule fondamentale. Nous écrivons donc les équations de Kirchhoff pour chacun des circuits (fig. 7) :

$$\begin{aligned}
 (1) \quad A & \quad I = i' - i_o - i_s \\
 (2) \quad C & \quad i_2 = i_1 - i_o - i_s \\
 (3) \quad ABCD & \quad R'i' - l'i_2 - li_1 + RI = -L \frac{dI}{dt} \\
 (4) \quad \quad \quad DAGC & \quad RI - gi_o - li_1 = -L \frac{dI}{dt} + G \frac{di_s}{dt} \\
 (5) \quad \quad \quad AGCS & \quad -gi_o + si_s = +G \frac{di_s}{dt}
 \end{aligned}$$

Nous allons chercher i_o en fonction de I , en éliminant d'abord i_2 et i' . L'équation (3) peut s'écrire

$$R'(I + i_o + i_{s3}) - l'(i_1 - i_o - i_s) - li_1 + RI = -L \frac{dI}{dt}$$

On a donc le système d'équations :

$$\begin{aligned}
 (6) \quad & (R + R)I + (R' + l')i_o - (l + l')i_1 + (R' + l')i_s = -L \frac{dI}{dt} \\
 (4) \quad & RI - gi_o - li_1 = -L \frac{dI}{dt} + G \frac{di_o}{dt} \\
 (5) \quad & -gi_o + si_s = G \frac{di_o}{dt}
 \end{aligned}$$

En éliminant i_1 entre (6) et (4), on trouve :

$$\begin{aligned}
 (R'l - R'l')I + [(R' + l')l + g(l + l')]i_o + l(R' + l')i_s &= L l \frac{dI}{dt} - G(l + l') \frac{di_o}{dt} \\
 -gi_o + si_s &= G \frac{di_o}{dt}
 \end{aligned}$$

Lorsque l'équilibre du pont est établi, on a

$$R'l - R'l' = 0$$

et on trouve, dans ces conditions,

$$\{s[(R' + l')l + g(l + l')] + gl(R' + l')\} i_o = L l' s \frac{dI}{dt} - [s(l + l') + l(R' + l')] G \frac{di_o}{dt}$$

En intégrant entre les mêmes limites que pour la formule ordinaire, et observant que le courant i_o qui traverse le galvanomètre est nul avant l'ouverture et après la fermeture du courant, on a :

$$\int_0^1 i_o dt = \frac{L l' s I}{s[(R' + l')l + g(l + l')] + gl(R' + l')}$$

Sans shunt, nous avons trouvé précédemment la formule

$$\int i_0 dt = \frac{L l I}{(R' + l')l + g(l + l')}$$

Cette formule peut d'ailleurs se déduire de la première, dans laquelle on aurait fait $s = \infty$.

Pour apprécier de quelle manière l'introduction du shunt réduit les impulsions, il suffit de diviser ces deux formules, l'une par l'autre, ce qui donne

$$\frac{\int i_0 di}{\int_s i_0 dt} = \frac{s[(R' + l')l + g(l + l')] + g l (R' + l')}{s[(R' + l')l + g(l + l')]} = \frac{R' + l' + g \left(1 + \frac{l'}{l}\right) + g \frac{R' + l'}{s}}{R' + l' + g \left(1 + \frac{l'}{l}\right)}$$

avec

$$\frac{l'}{l} = \frac{R'}{R}$$

Ces formules sont exactes, c'est-à-dire qu'on n'a négligé aucun terme dans le calcul. Dans la pratique, ces formules peuvent se simplifier dans certains cas, comme nous l'indiquerons bientôt.

En général, la formule

$$L = r \frac{T}{\pi} e \frac{\delta}{\alpha}$$

ne se trouve pas modifiée par l'introduction du shunt, car la réduction s'opère en même temps sur δ et sur α . Ce n'est que dans le cas où l'on aurait pris la valeur de α correspondant à r , sans shunt, et la valeur de δ avec l'emploi du shunt, qu'il faudrait tenir compte du calcul précédent. La formule devient alors

$$L = r \frac{T}{\pi} e \frac{\delta}{\alpha} \left[1 + \frac{g \frac{R' + l'}{s}}{R' + l' + g \left(1 + \frac{l'}{l}\right)} \right]$$

et si $R' + l'$ est négligeable devant $g \left(1 + \frac{l'}{l}\right)$, on a, en mettant $\frac{R'}{R}$ au lieu de $\frac{l'}{l}$

$$L = r \frac{T}{\pi} e \frac{\delta}{\alpha} \left(1 + \frac{1}{1 + \frac{R'}{R}} \frac{R' + l'}{s} \right)$$

Nous donnerons, à la fin de ce chapitre, les vérifications numériques de ces diverses formules.

2° Méthode directe

Au lieu de faire deux expériences séparées, on peut déterminer le coefficient de self-induction en observant simplement l'impulsion du

galvanomètre lorsqu'on coupe le circuit de la pile, pourvu qu'on connaisse l'intensité du courant qui traverse la bobine.

Supposons donc que la bobine dont on cherche le coefficient de self-induction soit combinée à trois autres résistances, de façon à former un pont de Wheatstone et que l'équilibre soit établi. La résistance totale du circuit du galvanomètre Deprez-d'Arsonval est celle qui correspond à l'égalité des racines de l'équation caractéristique; dans ces conditions, nous avons vu qu'on peut traiter le cas comme si l'on avait à faire à un galvanomètre périodique, à la condition toutefois de multiplier l'impulsion par e .

Pour déterminer le coefficient de self-induction, il suffit de noter la déviation obtenue lorsqu'on relève la clef de la pile, car on a :

$$\int i_o dt = \frac{L l' I}{l(R' + l') + g(l + l')}$$

D'autre part, nous avons trouvé

$$\int i_o dt = \frac{T}{\pi} e \frac{i}{\alpha} \delta,$$

ce qui donne

$$\frac{L l' I}{l(R' + l') + g(l + l')} = \frac{T}{\pi} e -$$

d'où

$$L = \frac{T}{\pi} e \frac{i}{\alpha} \frac{\delta}{I} \left[(R + l) + g \left(\frac{l}{l'} + 1 \right) \right]$$

Dans cette expression,

$$\frac{l}{l'} = \frac{R}{R'}$$

est le rapport des deux branches du pont.

Emploi du shunt

Lorsque la déviation est trop forte, on met une dérivation (shunt) sur le circuit du galvanomètre. Nous avons calculé, plus haut, la formule qu'il s'agit d'appliquer dans ce cas.

On trouve ainsi

$$\int_s i_o dt = \frac{L l' s I}{s[(R' + l')l + g(l + l')] + g l(R' + l')} = \frac{T}{\pi} e \frac{i}{\alpha} \delta$$

d'où

$$L = \frac{T}{\pi} e \frac{i}{\alpha} \frac{\delta}{I} \left[\frac{l}{l'} (R' + l') + g \left(1 + \frac{l}{l'} \left(1 + \frac{R' + l'}{s} \right) \right) \right]$$

Cette formule peut encore se mettre sous la forme

$$L = \frac{T}{\pi} e \frac{i}{\alpha} \frac{\delta}{I} \left[R + l + g \left(1 + \frac{R}{R'} + \frac{R + l}{s} \right) \right]$$

Dans certains cas, ces formules peuvent se simplifier, car la résistance du circuit du galvanomètre est souvent bien supérieure à celle des branches du pont.

Ainsi, pour un galvanomètre que nous avons employé, la résistance était de 222 ohms, et la résistance additionnelle, permettant d'obtenir le cas critique de l'égalité des racines, devait être de 100 ohms. On a donc $g = 222 + 100 = 322$ ohms, c'est le nombre que nous avons désigné par R dans le 2^{me} chapitre. Or, les bobines dont nous avons déterminé le coefficient de self-induction avaient le plus souvent une résistance de 1 à 2 ohms et très souvent moins. Lorsque les 4 branches du pont ont la même résistance, on a $\frac{l}{l'} = 1$, et on voit que, dans les circonstances énoncées, $R + l'$ n'est que 1/100 de $g \left(\frac{l}{l'} + 1 \right)$ ou de $2g$. On peut donc négliger le premier terme et écrire

$$L = \frac{T}{\pi} e^{\frac{i}{\alpha}} \frac{\partial}{\partial l} g \left(\frac{R}{R'} + 1 \right)$$

Lorsqu'on emploie le shunt, on aura dans les mêmes conditions

$$L = \frac{T}{\pi} e^{\frac{i}{\alpha}} \frac{\partial}{\partial l} g \left[1 + \frac{R'}{R} \left(1 + \frac{R' + l'}{s} \right) \right]$$

ou

$$L = \frac{T}{\pi} e^{\frac{i}{\alpha}} \frac{\partial}{\partial l} g \left(1 + \frac{R}{R'} + \frac{R + l'}{s} \right)$$

Il est facile de voir que ces formules simplifiées s'appliquent encore dans le cas où le rapport

$$\frac{l}{l'} = \frac{R}{R'}$$

est différent de 1:

Avant de vérifier ces formules expérimentalement, nous allons examiner le cas où les résistances l et l' sont de beaucoup supérieures aux résistances R et R' .

Ce cas se présente souvent, car lorsqu'on est obligé de lancer des courants intenses dans la bobine, il est avantageux de s'arranger de manière que la plus grande partie du courant de la pile passe par D A B et qu'il ne passe que peu de courant dans D C B. Si, par exemple, il faut lancer dans DA un courant de 20 ampères, il faudrait, dans le cas où les résistances seraient partout égales, disposer d'une source capable de débiter un courant de 40 ampères. Il est donc préférable d'augmenter la résistance dans D C B, de sorte qu'il ne passe que peu de courant dans ces branches du pont; d'autant plus qu'il est impossible d'employer des courants intenses avec des boîtes de résistances.

Examinons donc le cas où l'on aurait $R = R'$ et $l = l' = 100 R$, et

voyons si la sensibilité de la méthode se trouve beaucoup altérée par cette augmentation de la résistance.

Lorsque $\frac{l}{l'} = 1$, la formule devient

$$L = \frac{T}{\pi} e \frac{i}{\alpha} \frac{\delta}{I} (R' + l' + 2g)$$

Changeons l' en l'_1 , tout en laissant R' constant, on aura, puisque L et I n'ont pas varié

$$L = \frac{T}{\pi} e \frac{i}{\alpha} \frac{\delta'}{I} (R' + l'_1 + 2g)$$

d'où

$$\frac{\delta'}{\delta} = \frac{R' + l' + 2g}{R' + l'_1 + 2g}$$

Supposons, par exemple, qu'on ait les valeurs suivantes :

$$R' = 1 \text{ ohm} \quad l' = 1 \text{ ohm} \quad g = 350 \text{ ohms}$$

et

$$l'_1 = 100 \quad R' = 100 \text{ ohms}$$

il viendra :

$$\frac{\delta'}{\delta} = \frac{2 + 700}{1 + 100 + 700} = \frac{7}{8}$$

Donc, dans ce cas, l'impulsion n'est diminuée que de $1/8$. Les impulsions ne commencent à être réduites sensiblement que lorsque la résistance l'_1 est supérieure à celle du circuit galvanométrique. Il est évident que les mêmes conclusions ont lieu, lorsque le rapport $\frac{l}{l'}$ est différent de l'unité.

Il est d'autant plus avantageux d'augmenter la résistance des branches l et l' , que le shunt est relatif au terme $R' + l'$ ou $R + l$. Or, comme on ne peut pas changer R et R' , il est avantageux de prendre l ou l' aussi grand que possible, pour que la résistance du shunt ne soit pas trop petite, car il est toujours difficile de déterminer rigoureusement de très faibles résistances. Il est évident qu'il faut tenir compte de ces résistances additionnelles pour la résistance qu'on ajoute à celle du galvanomètre, car la résistance totale du circuit galvanométrique doit toujours rester invariable.

Nous sommes maintenant en état de discuter le dispositif à adopter pour obtenir le meilleur résultat.

Dispositif expérimental

Nous traiterons le cas relatif à la *méthode directe*. Il s'agit d'appliquer la formule :

$$L = \frac{T}{\pi} e \frac{i}{\alpha} \frac{\delta}{I} \left[R + l + g \left(\frac{R}{R'} + 1 \right) \right]$$

et, lorsqu'on est obligé d'employer un shunt de résistance s , la formulé :

$$L = \frac{T}{\pi} e \frac{i}{\alpha} \frac{\delta}{l} \left[R + l + g \left(1 + \frac{R}{R'} + \frac{R+l}{s} \right) \right]$$

La première mesure à faire, c'est la détermination des constantes relatives au galvanomètre.

Constantes du galvanomètre

On commence par déterminer la résistance qu'il faut donner au circuit galvanométrique pour que les oscillations soient apériodiques mais juste sur le point de devenir périodiques. C'est cette résistance qu'il faut toujours donner au galvanomètre; de plus, il faut tenir compte des résistances des branches du pont, si ces résistances ne sont pas négligeables : telle est la première constante.

La deuxième constante est la durée T d'une oscillation simple, le circuit du galvanomètre étant ouvert. Il suffit de compter une cinquantaine d'oscillations et d'en noter la durée.

On peut faire cette mesure avec une montre ordinaire à secondes; cependant un compteur à pointage augmente beaucoup l'exactitude de la mesure. Pour donner l'impulsion au galvanomètre, on lance un courant avec une pile shuntée et l'on coupe le circuit.

La troisième constante est celle qu'on appelle ordinairement la *constante du galvanomètre* : c'est la déviation produite par un courant d'intensité connue. Ordinairement on prend un courant d'un microampère.

Il est à remarquer que, dans notre formule, on n'a pas besoin de connaître la déviation en valeur absolue, puisque la déviation n'intervient que dans le rapport $\frac{\delta}{\alpha}$. Pourvu qu'on prenne la même échelle, placée à la même distance, il suffit de lire les déviations en centimètres, en millimètres, ou en divisions arbitraires, sans s'occuper de la valeur exacte de la distance du miroir à l'échelle.

Ces constantes une fois déterminées, on peut procéder à l'arrangement du pont.

Arrangement du pont

Lorsque la bobine dont on cherche le coefficient de self-induction a une résistance faible, de quelques ohms au plus, il est avantageux de donner, aux branches l et l' , des résistances assez fortes, — de 10 à 100 fois celles de la bobine. Quant à la résistance R' , on peut, lui donner ou bien une résistance égale à R , ou une résistance plus faible; dans aucun cas, il n'est avantageux de donner à R' une résistance supérieure à

celle de la bobine R,—à moins qu'il ne s'agisse d'une détermination isolée, où il n'est pas nécessaire d'employer des courants intenses (fig. 8).

Il y a avantage soit à rendre la résistance de R' égale à celle de R en prenant le même fil dans les deux cas, soit à choisir pour R' une résistance en maillechort, dont l'échauffement sera le même que celui de la bobine R⁽¹⁾. Mais on n'a pas toujours à sa disposition des résistances ainsi arrangées; ce qu'il y a de plus simple dans ce cas, c'est de prendre pour R', une résistance faible, (1/10 de R, par exemple), formée par un fil de fort diamètre, qui ne s'échauffe pas par le courant⁽²⁾.

Une petite résistance additionnelle permet de parfaire l'équilibre. Lors-

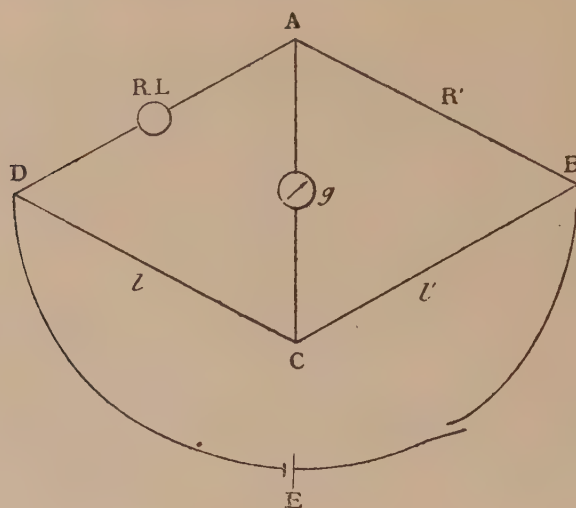


FIG. 8

que la bobine R a une résistance de 1 ohm, on donnera aux branches l et l' , des résistances de 10 à 100 ohms.

(1) On peut, en effet, traiter par le calcul le problème suivant. On a un fil de cuivre et un fil de maillechort parcourus par le même courant; quel doit être le rapport des diamètres de ces deux fils pour que l'augmentation de résistance due à l'échauffement par le passage du courant soit la même pour les deux fils? On trouve, en partant des données ordinaires, que si le diamètre du fil de cuivre est 1, le diamètre du fil de maillechort doit être compris entre 1,4 et 1,5.

Le fil de maillechort a l'avantage d'avoir une résistance beaucoup plus forte; ainsi une bobine de 4 mètres de fil de maillechort de 3 millimètres de diamètre a environ la même résistance qu'une bobine de 40 mètres de fil de cuivre de 2 millimètres de diamètre et subit le même échauffement par le passage d'un même courant.

En disposant un pont d'après ces considérations, nous avons pu lancer un courant allant jusqu'à 40 ampères dans un fil de cuivre de 2 millimètres de diamètre, sans que les mesures cessent d'être possibles.

(2) On peut encore se servir du pont sous la forme de pont à fil divisé; dans ce cas on peut ajouter deux résistances auxiliaires à celle du fil divisé, lorsque ce fil a une résistance trop faible.

Comme la résistance du circuit galvanométrique doit toujours rester la même, il faut tenir compte des résistances des branches du pont, à moins que ces résistances ne soient fort petites. Dans le cas contraire, on calculera la résistance réduite et on arrangera en conséquence la résistance additionnelle.

La dernière quantité à déterminer, c'est l'intensité I du courant qui passe par la bobine. On peut mesurer cette intensité avec le même galvanomètre Deprez-d'Arsonval qui sert à la détermination du coefficient de self-induction. Il suffit, pour cela, de disposer un commutateur qui permette d'intercaler à volonté le galvanomètre entre DA ou entre CA.

Lorsque le courant a une faible intensité, on peut mesurer directement cette intensité en adaptant un shunt convenable au galvanomètre. Lorsque le courant a une intensité considérable, il est au contraire plus commode de prendre, toujours avec le même galvanomètre, la différence de potentiel aux bornes de la bobine.

Nous avons trouvé très avantageux d'employer pour ces mesures un shunt gradué, qui donne, par un simple changement de fiches, soit les intensités en ampères ou en fractions décimales d'ampères; soit les forces électromotrices en volts. Il est évident qu'il faut vérifier de temps à temps l'exactitude de la graduation ou déterminer le facteur de réduction ⁽¹⁾.

Comme source électrique on prend, pour de faibles intensités, des éléments Daniell et, pour des intensités plus fortes, des éléments Bunsen ou des accumulateurs. C'est d'ailleurs avec des accumulateurs que nous avons effectué la plupart des déterminations dont nous parlons ici.

Résumé

Pour effectuer une mesure de coefficient de self-induction, on commence par déterminer les constantes du galvanomètre, savoir : la durée d'une oscillation à cadre ouvert, la déviation correspondant à un micro-ampère et la résistance pour laquelle le galvanomètre est apériodique, mais sur le point de devenir périodique.

Nous avons indiqué comment on fait ces déterminations. Ajoutons qu'il suffit de les faire une seule fois, sauf à les vérifier lorsqu'on craint qu'une cause quelconque, comme par exemple le transport du galvanomètre, peut avoir modifié les constantes.

Ces constantes étant connues, il ne reste qu'à monter le pont comme nous l'avons indiqué et à réaliser l'équilibre, en ayant soin que la résistance totale du circuit galvanométrique soit toujours la même et égale à la résistance qui correspond à l'égalité des racines de l'équation caractéristique.

L'opération proprement dite consiste alors à observer l'angle d'impulsion, lorsqu'on établit ou lorsqu'on coupe le circuit de la pile, l'équilibre stable ou permanent étant établi.

(1) Voir pour la description détaillée de ce shunt *La Lumière Électrique*. T. XVII, p. 213.

Avant et après cette mesure, on a déterminé à l'aide du commutateur, l'intensité du courant qui traverse la bobine.

Comme il est possible de faire toutes les mesures en moins d'une seconde, on peut employer des courants très intenses.

Lorsque l'impulsion est trop forte, on emploie un shunt pour la réduire, et on se sert des formules suivantes.

On a, sans shunt :

$$L = \frac{T}{\pi} e \frac{i}{\alpha} \frac{\delta}{l} \left[g \left(1 + \frac{R}{R'} \right) + R + l \right]$$

et, avec un shunt s ,

$$L = \frac{T}{\pi} e \frac{i}{\alpha} \frac{\delta}{l} \left[g \left(1 + \frac{R}{R'} + \frac{R+l}{s} \right) + R + l \right]$$

Le calcul numérique de ces formules se fait très rapidement. Le terme $\frac{T}{\pi} e \frac{i}{\alpha}$ est un facteur constant. On exprime T en secondes, i en ampères. Quant à α , si D est la distance du miroir à l'échelle en centimètres et d la déviation en centimètres, on a : $\alpha = \frac{d}{2D}$; mais, comme on a d'autre part, $\delta = \frac{d'}{2D}$, on a $\frac{\delta}{\alpha} = \frac{d'}{d}$, et il est inutile de connaître la distance D . Si, au lieu d'une échelle à réflexion, on lit directement les angles sur un cadran, on n'a qu'à prendre, pour α et δ , les degrés lus directement sur le cadran.

Le facteur entre crochets dépend de g , résistance totale du circuit galvanométrique. Cette résistance a été déterminée une fois pour toutes, avec une approximation convenable; le rapport $\frac{R}{R'}$ est connu, ainsi que la valeur du shunt s et les résistances R et l . D'ailleurs, tant qu'on ne change pas les résistances des branches du pont, toute la quantité entre parenthèses reste constante. La valeur en est exprimée en ohms.

Les seules valeurs qu'il faille déterminer chaque fois sont δ , l'impulsion observée (on exprime cette grandeur avec les mêmes unités que α) et l , intensité du courant, qu'on évalue en ampères.

La valeur de L se trouve donc rapportée finalement à T , qui est évalué en secondes, et à une résistance, exprimée en ohms. La valeur de L est ainsi évaluée en unités pratiques, c'est-à-dire en 10^9 centimètres, puisque L a les dimensions d'une longueur.

Lorsqu'il s'agit d'une seule détermination, l'emploi d'une résistance auxiliaire semble être plus expéditive, surtout si l'on opère avec une boîte à pont; en effet, on n'a pas besoin de connaître la constante du galvanomètre, ni l'intensité du courant qui traverse la bobine. Cependant, lorsque la bobine a une faible résistance, la résistance additionnelle r , peut devenir tellement petite que la détermination exacte offre des difficultés.

Par exemple, l'un des électro-aimants qui nous a servi pour nos déterminations avait une résistance totale de 0,20 ohm environ, le fil étant formé par 40 mètres de fil de cuivre de 2 millimètres de diamètre. La résistance additionnelle n'était alors que de 0,80 m. de ce fil, soit environ 0,004 ohm; on comprend qu'il est fort difficile de déterminer exactement une aussi faible résistance. Dans notre cas, comme il s'agissait de vérifier des formules, nous avons déterminé cette faible résistance à l'aide du pont double de Thomson, et il nous a été possible d'obtenir une grande approximation, en la comparant directement à des tubes de mercure; mais ces méthodes ne sont pas d'une application très facile. Pour ces raisons, il est donc avantageux de se servir de la méthode directe, car le coefficient de self-induction se trouve alors rapporté à la résistance du circuit galvanométrique, résistance qui est toujours supérieure à 100 ohms et qu'on détermine facilement avec une grande exactitude.

De plus, lorsqu'il s'agit de déterminations continues, lorsqu'on cherche par exemple comment le coefficient de self-induction varie pour des intensités croissantes du courant, on est obligé de connaître l'intensité du courant, et alors l'application de la formule directe se trouve tout indiquée. Nous ajouterons que ce dernier problème, — la variation du coefficient d'induction, lorsque l'intensité du courant varie, — a une importance bien plus considérable que la détermination isolée de ce coefficient de self-induction sans indication de l'intensité du courant. Dans le chapitre IV, nous indiquerons comment varie le coefficient de self-induction d'un électro-aimant lorsque le courant est assez intense pour amener le fer à saturation.

Nous allons terminer ce chapitre par les valeurs numériques du coefficient de self-induction trouvées d'après les différentes méthodes exposées plus haut. Ces valeurs permettent de juger de l'approximation qu'on peut obtenir dans les différents cas.

On s'est servi, pour ces vérifications, d'un petit électro-aimant, dont on pouvait facilement enlever les noyaux de fer doux.

Quant à l'enroulement, on avait pris, pour une paire de bobines, du gros fil de 2 millimètres de diamètre; dans une autre paire de bobines, le fil plus fin avait un diamètre de 0,8 m.m. Ces bobines avaient d'ailleurs la même forme extérieure et s'adaptaient sur les mêmes noyaux de fer doux.

On sait que, dans des bobines de formes extérieures identiques et sans fer, le rapport $\frac{L}{r}$ du coefficient de self-induction à la résistance, est constant; ce fait a été vérifié expérimentalement par M. Brillouin.

L'auteur dit à ce sujet ⁽¹⁾ : « Plusieurs causes rendent cette proposition difficile : d'abord la différence de diamètre du fil de cuivre qui rend très peu probable l'identité de la matière, et, par suite, sa conductibilité spéci-

(1) BRILLOUIN. *Comparaison des coefficients d'induction*, 67 et 68.

fique; puis la difficulté de satisfaire aux conditions de similitude pour l'épaisseur de l'isolant. Une vérification rigoureuse exigerait que les bobines soient construites avec tous les soins que l'on donne aux bobines étalons, et que l'on détermine directement, pour chaque fil employé, sa résistance spécifique. »

Connaissant donc le rapport des résistances, on peut prévoir le rapport des coefficients de self-induction, mais comme les bobines dont il s'agit ont été enroulées de la manière ordinaire, la vérification de la loi n'est que très approximative.

Vérifications expérimentales

Les tableaux suivants renferment le résumé des nombres trouvés.

On a mesuré le coefficient de self-induction d'un même électro-aimant avec ou sans les noyaux de fer doux, d'après les différentes méthodes que nous avons énumérées :

1° Par l'emploi d'une résistance additionnelle, en se servant d'un galvanomètre ordinaire de Thomson, dont la résistance était d'environ 7 ohms (6,88 ohms).

La formule employée est

$$L = r \frac{T}{\pi} \frac{\delta}{\alpha} \left(1 + \frac{\lambda}{2} \right)$$

Cette méthode est désignée par « n° 1 » dans la première colonne verticale du tableau ci-après.

2° Par la même méthode, mais en se servant d'un galvanomètre apériodique Deprez-d'Arsonval employé dans les conditions énoncées.

Ce galvanomètre avait une résistance de 222 ohms et on devait y ajouter une résistance de 100 ohms pour se placer dans le cas de l'égalité des racines de l'équation caractéristique;

La formule est, dans ce cas :

$$L = r \frac{T}{\pi} \frac{\delta}{\alpha} e$$

Cette méthode est désignée par « n° 2 ».

3° Par la méthode directe, en employant toujours le galvanomètre apériodique.

La formule employée est

$$L = \frac{T}{\pi} e \frac{i}{\alpha} \frac{\delta}{1} g \left(1 + \frac{R}{R'} \right)$$

g , étant la résistance totale du circuit galvanométrique : c'est la méthode « n° 3 » de la première colonne.

On a, d'ailleurs, changé dans plusieurs expériences, en vue de la vérification des formules, le rapport des branches du pont.

Nous allons d'abord donner des mesures relatives à des bobines sans noyaux de fer doux (Tableau I).

TABLEAU I
Electro-aimant à gros fil, (2 millimètres de diamètre), sans fer.
Résistance = 0,234 ohms.

MÉTH.	BRANCHES DU PONT ohms				I amp.	T sec.	λ	δ c. m.	r ohms	α c. m.	g		$\frac{i}{\alpha}$	I, 10 ⁹ c. m.
	R	R'	l	l'							galv.	add.		
N° 1	0 24	2 4	1	10	3 23	1 70	0 172	8 5	0 0025	15 0	7	193	0 00083	
	0 24	0 24	0 5	0 5	—	2 20	0 214	3 1	0 0040	11 4	7	50	0 00084	
N° 2	0 24	2 4	1	10	—	0 386	—	1 15	0 0040	1 8	222	99	0 000853	
N° 3	0 24	2 4	1	10	0 81	0 386	—	1 15	—	—	222	99	$\frac{10^{-6}}{0 193}$ 0 000870	

La moyenne des valeurs de L est :

$$L = 0,00085 \times 10^9 \text{ centimètres}$$

et les valeurs extrêmes ne diffèrent de cette moyenne que de 2/80 ou 1/40.

Le deuxième tableau renferme les résultats relatifs à un électro-aimant, de forme extérieure identique au précédent, mais enroulé de fil plus fin.

TABLEAU II
Electro-aimant à fil fin (0,8 m.m. de diamètre) sans noyaux de fer.
Résistance = 6,76 ohms.

MÉTH.	BRANCHES DU PONT ohms				I amp.	T sec.	λ c. m.	δ c. m.	r ohms	α c. m.	g		i α	L 10^9 c. m.
	R	R'	l	l'							galv.	add.		
N° 1	6 8	6 8	1	10	1 83	0 202	8 3	1 3	0 05	12 0	7	50	0 0211	
N° 2	6 8	6 8	1	10	0 386	»	1 3	»	0 5	9 1	222	9	0 0238	
	»	»	»	»	»	»	1 9	»	0 5	13 4	»	»	0 0236	
	»	»	»	»	»	»	1 9	»	0 2	5 3	»	»	0 0227	
N° 3	6 8	6 8	1	10	0 386	»	1 3	»	»	»	222	9	10-6 0 193	0 0236
	«	»	»	»	»	»	1 9	»	»	»	»	»	»	0 0227

On a, comme dans le cas précédent, enlevé les noyaux de fer doux.
La moyenne de ce tableau donne environ

$$L = 0,0225 \times 10^9 \text{ c. m.}$$

En comparant les valeurs de $\frac{L}{r}$ on trouve :

TABLEAU III
Electro-aimant à gros fil (2 millimètres de diamètre) avec noyaux de fer doux.
Résistance = 0,234 ohms.

METH.	BRANCHES DU PONT ohms				I amp.	T sec.	λ c. m.	δ c. m.	r ohms	α c. m.	g		i α	L 10 ⁹ c. m.
	R	R'	l	l'							galv.	aald.		
N° 1	0 24	0 24	0 24	0 24	»	1 86	0 202	11 4	0 0040	3 4	7 0	50		0 00874
N° 2	0 24	2 4	1 0	10	»	0 386	»	2 3	0 0040	0 35	222	99		0 00877
	0 24	»	»	»	»	»	»	9 3	»	3 4	»	»		0 00889
N° 3	0 24	2 4	1 0	10	0 65	0 386	»	9 3	»	»	»	99	$\frac{10^{-6}}{0.193}$	0 00870

Pour l'électro-aimant à gros fil

$$\frac{L}{r} = \frac{0,00085}{0,234} = 0,00363$$

et pour l'électro-aimant à fil fin

$$r \frac{L}{\alpha} = \frac{0,0225}{0,76} = 0,00333$$

TABEAU IV
Electro-aimant à fil fin (0,8 de diamètre) avec noyaux de fer doux. Résistance = 6,76 ohms.

MÉTHOD.	BRANCHES DU PONT ohms				I amp.	T sec.	λ	$\varnothing$ c. m.	r ohms	α c. m.	g		i $\frac{i}{\alpha}$	L 10 ⁸ c. m.	OBSERVAT.
	R	R'	I	I'							galv.	add.			
N° 1	6 8	68	1	10	»	1 83	0 202	13 3	0 5	18 5	7	200	»	0 220	A
	6 7	1	70	10	»	1 385	0 065	5 7	0 5	5 15	7	200	»	0 260	B
	7 0	70	1	10	»	»	»	4 3	0 5	4 4	7	200	»	0 230	
N° 2	6 8	1	68	10	»	0 386	»	3 1	0 1	0 45	222	92	»	0 228	
	»	»	»	»	»	»	»	6 45	0 1	0 90	»	»	»	0 238	
	»	»	680	100	»	»	»	0 6	0 5	0 45	»	»	»	0 218	
	»	»	680	100	»	»	»	3 0	0 5	2 2	»	»	»	0 225	
	»	68	1	10	»	»	»	3 4	0 5	2 4	»	»	»	0 237	
	7 0	1	70	10	»	»	»	4 37	0 5	2 82	»	91	»	0 260	A'
	»	»	»	»	»	»	»	4 72	0 5	3 0	»	91	»	0 260	B'
N° 3	»	70	1	10	»	»	»	3 35	0 5	2 35	»	93	»	0 238	
	»	»	»	»	»	»	»	3 5	0 5	2 5	»	93	»	0 234	
	6 8	68	1	10	0 0093	0 386	»	3 4	»	»	222	92	$\frac{10^{-6}}{0 193}$	0 219	
	»	»	»	»	0 020	»	»	7 75	»	»	222	92		0 231	

Il y a donc une différence de $\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

Comme nous l'avons déjà dit, cette différence doit être attribuée à l'enroulement et à la nature du fil.

Nous procédons maintenant à la détermination du coefficient de self-induction de ces mêmes électro-aimants, mais pourvus cette fois de leurs noyaux de fer doux (Tableaux III et IV).

Comme on le voit au 3^me tableau, l'introduction des noyaux de fer doux a décuplé la valeur de L . On avait employé des courants très faibles afin de rester bien au-dessous du point de saturation du fer.

Nous inscrivons au 4^me tableau les mesures relatives à l'électro-aimant à fil fin. Celles-ci ont été nombreuses et l'on a fait varier les résistances des branches du pont dans de fortes proportions.

Dans ce tableau la divergence des résultats provient principalement de la présence des noyaux de fer doux.

Nous traiterons de l'influence du fer avec détails dans le prochain cha-

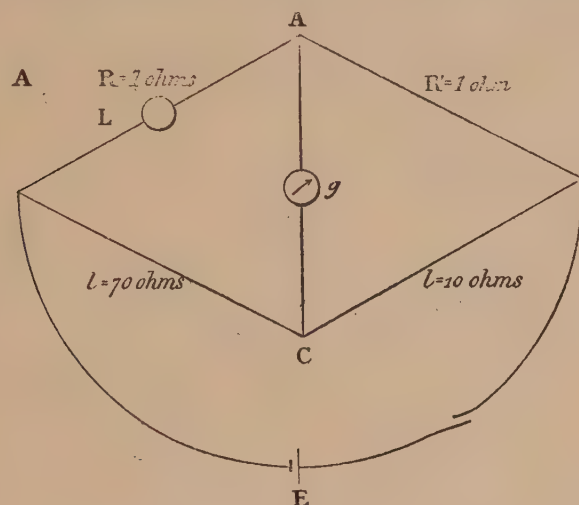


FIG. 9

pitre ce que nous voulons faire ressortir ici, c'est que le galvanomètre apériodique donne les mêmes résultats que le galvanomètre périodique.

A cet effet nous avons réalisé les expériences figurées par les lettres A et A', B et B'. Dans les expériences A et A' le pont était monté, comme le montre la figure 9.

En E on avait mis un élément Daniell. Avec le galvanomètre Thomson, on a trouvé

$$L = 0,261 \times 10^9 \text{ c. m.}$$

Puis on a remplacé le galvanomètre Thomson par un galvanomètre apériodique dont la résistance était de 222 ohms; pour obtenir le cas de l'égalité des racines, il fallait ajouter à cette résistance une résistance auxiliaire de 100 ohms. En calculant ici la résistance réduite des branches du pont par rapport au galvanomètre, on a

$$P = \frac{(R + l)(R' + l')}{R + l + R' + l'}$$

ce qui donne, dans notre cas

$$\rho = \frac{77 \times 11}{88} - \frac{77}{8} = 9,6 \text{ ohms}$$

On a donc porté la résistance additionnelle à 91 ohms, pour faire le total de 100 ohms.

Dans ces circonstances, et avec la même pile, on a trouvé

$$L = 0,260 \times 10^9 \text{ c. m.}$$

nombre presque identique au précédent.

Comme deuxième expérience, on a interverti le galvanomètre et la pile ce qui a donné les résultats B et B' (fig. 5). Avec le galvanomètre Thomson, on a trouvé

$$L = 0,230 \times 10^9 \text{ c. m.}$$

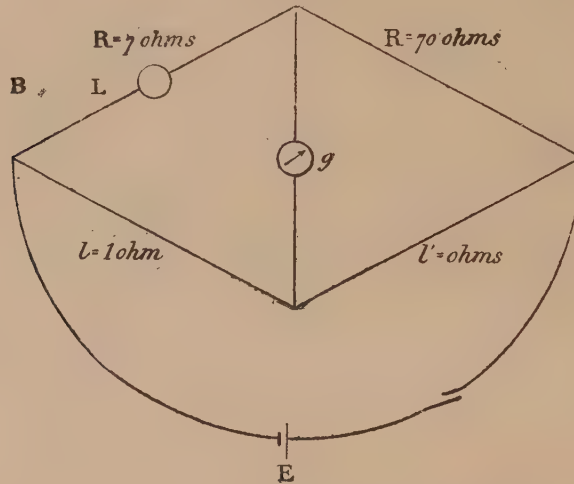


FIG. 10. — (Lire $R' = 70$ ohms $l' = 10$ ohms)

nombre qui diffère d'un dixième du nombre précédent.

Or, en remplaçant le galvanomètre Thomson, par le galvanomètre apériodique, avec une résistance additionnelle de 93 ohms — car la résistance réduite est ici

$$\rho = \frac{8 \times 80}{88} = \frac{80}{11} = 7,3$$

— on a trouvé

$$L = 0,236 \times 10^9 \text{ c. m.}$$

nombre très voisin du précédent.

On voit donc que les deux galvanomètres donnent les mêmes résultats.

On peut encore faire remarquer que les formules

$$L = r \frac{T}{\pi} \frac{\delta}{\alpha} \left(1 + \frac{\lambda}{2} \right)$$

ou

$$L = r \frac{T}{\pi} \frac{\delta}{\alpha} e$$

donnent de très bons résultats pour des bobines sans fer, car dans ce cas la résistance additionnelle r , n'est qu'une faible fraction de la résistance de la bobine. Mais, par l'introduction des noyaux de fer doux, on augmente le coefficient de self-induction dans le rapport de 1 à 10 environ et, dans ces circonstances, la résistance additionnelle peut devenir une fraction notable de la résistance de la bobine. Ainsi, avec l'électro-aimant à fil fin, dont la résistance est de 7 ohms environ, il suffit d'ajouter une résistance de 0,05 à 0,1 ohm (soit 1/140 environ) lorsqu'on a enlevé les noyaux de fer doux. Mais, avec les noyaux de fer doux, il faut porter cette résistance additionnelle à 0,5 ohm (soit 1/14 de la résistance totale) et dans ce cas les formules ne sont plus très exactes. Ainsi dans les expériences A on a trouvé pour

$$\begin{array}{lll} r = -0,5 \text{ ohm.} & \alpha = 5,4 \text{ ohms} & \left. \begin{array}{l} \text{Galvanomètre} \\ \text{Thomson} \end{array} \right\} \\ r = +0,5 & \alpha = 4,9 & \\ \text{Moyenne : } \alpha = 5,15. & & \end{array}$$

La moyenne $\alpha = 5,15$ est la valeur avec laquelle on a calculé la valeur de L .

Avec le galvanomètre apériodique on trouve un résultat analogue. On a dans les expériences A',

$$\begin{array}{ll} r = -0,5 & \alpha = 3,0 \\ r = +0,5 & \alpha = 2,65 \\ \text{Moyenne : } \alpha = 2,82. & \end{array}$$

Dans ces circonstances, il est donc préférable de se servir de la formule directe, car alors cette cause d'erreur n'intervient pas.

Il resterait encore à vérifier les formules relatives au shunt du galvanomètre; nous ferons ces vérifications dans le chapitre suivant.

CHAPITRE IV

RELATIONS ENTRE LES ÉLÉMENTS MAGNÉTIQUES ET LE COEFFICIENT DE SELF-INDUCTION D'UN ÉLECTRO-AIMANT

Dans les chapitres précédents nous avons indiqué une méthode pour la mesure du coefficient de self-induction ; cette méthode permet de suivre les variations de ce coefficient dans un système de bobines ou d'électro-aimants.

Elle présente en outre cet avantage, que l'on peut opérer à côté d'électro-aimants puissants, car le galvanomètre Deprez-d'Arsonval n'est pas influencé par leur présence.

Nous allons examiner maintenant de quelle utilité peut être la connaissance du coefficient de self-induction dans la détermination des éléments magnétiques d'une bobine ou d'un électro-aimant.

Cette question a une grande importance au point de vue des machines

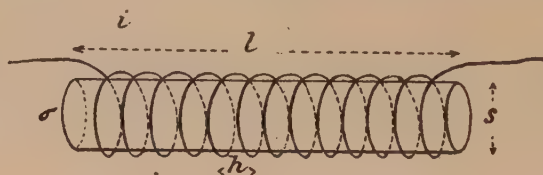


FIG. 11

dynamo-électriques, dont le fonctionnement dépend surtout de l'intensité du champ magnétique.

Cas d'un solénoïde indéfini. — Considérons un solénoïde de très grande longueur, ou, ce qui revient au même, négligeons l'action des extrémités.

Le moment magnétique de ce solénoïde (fig. 11) est :

$$M = 2 S i \frac{l}{h}$$

Mais d'un autre côté, l'action extérieure revient à celle de deux couches magnétiques de densité superficielle σ . On a ainsi :

$$M = 2 S \sigma l$$

Nous allons voir qu'il est possible de déterminer cette densité superficielle σ en partant du coefficient de self-induction L .

En effet, si Q représente le flux total de force magnétique, on a :

$$n Q = L i$$

équation dans laquelle $n \left(= \frac{l}{h} \right)$ représente le nombre de tours du fil du solénoïde.

Or, le flux de force qui traverse une section médiane, est :

$$Q = SF,$$

F étant l'intensité du champ magnétique.

Cette intensité a pour expression :

$$F = 4\pi \frac{n}{l} i$$

d'où

$$Q = 4\pi \frac{n}{l} i S$$

Or, on a d'un autre côté :

$$F = 4\pi \sigma$$

d'où

$$Q = 4\pi \sigma S$$

et

$$Li = nQ = 4\pi \sigma S n$$

donc

$$\sigma = \frac{Li}{4\pi S n}.$$

Cela donne pour l'intensité du champ magnétique, à l'intérieur du solénoïde, l'expression

$$F = \frac{Li}{Sn}$$

Pour le moment magnétique, on a

$$M = 2 S \sigma l = 2 S l \frac{Li}{4\pi S n} = \frac{Li l}{2\pi n}$$

Il est donc possible de calculer, dans ce cas théorique, l'intensité du champ magnétique en connaissant le coefficient de self-induction L.

Comme vérification, il faut retrouver la valeur

$$M = 2 S i \frac{l}{h}$$

lorsqu'on substitue à L sa valeur.

Or, en négligeant les effets des extrémités, on a :

$$L = 4\pi \frac{n^2}{l} S$$

Donc, en substituant, on a

$$M = 4\pi \frac{n^2}{l} S \times \frac{il}{2\pi n} = 2 S i n = 2 S i \frac{l}{h} \quad \text{car } n = \frac{l}{h}$$

ce qui vérifie le calcul précédent.

Cas d'une bobine quelconque. — Dans le cas d'une bobine quelconque, ou même d'un solénoïde réel, le calcul précédent ne donne plus des résultats aussi complets. En effet, nous avons supposé que toutes les lignes de force traversent normalement la face terminale S (fig. 12). En réalité, il n'en

est pas ainsi, il n'y a guère qu'une partie des lignes de force qui traversent la surface terminale S (fig. 13) ⁽¹⁾.

L'inspection des spectres magnétiques permet de constater facilement cette diminution.

Pour nous rendre compte du champ magnétique extérieur produit par une bobine renfermant du fer doux, nous allons d'abord considérer le moment magnétique d'un tel système.

Lorsqu'on plonge un cylindre de fer doux dans une bobine magnétisante, le fer présente, pendant le passage du courant, toutes les propriétés d'un aimant ordinaire.

D'ailleurs, la bobine elle-même possède, pendant ce laps de temps, des propriétés magnétiques, et dans le cas général, on a la superposition de deux effets : l'action magnétique de la bobine et celle du noyau de fer. Il est facile de séparer ces deux effets, soit en neutralisant l'action de la bobine seule, soit en considérant séparément les deux effets. Par exemple, supposons qu'on veuille déterminer l'action d'une bobine à noyau de fer sur un aimant mobile, au moyen du magnétomètre de Gauss. On



FIG. 12



FIG. 13

pourra, dans ce cas, déterminer d'abord l'action de la bobine seule, puis celle de la bobine munie du noyau de fer doux ; en retranchant de la dernière déviation, celle obtenue par l'action de la bobine seule, on aura l'action du noyau de fer. On peut encore neutraliser l'action de la bobine par celle d'une autre bobine placée symétriquement à la première et parcourue par le même courant ; dans ce cas encore, on n'obtient que l'effet dû uniquement au noyau de fer doux.

Il résulte des expériences classiques, que pour de faibles intensités de courant, le moment magnétique du noyau de fer doux est proportionnel à l'extrémité du courant, mais que ce moment tend vers un maximum. Ce maximum s'obtient assez facilement avec de grandes bobines dans lesquelles on a mis un noyau de faible épaisseur ; au contraire, avec des bobines de moyennes dimensions et des noyaux d'un diamètre un peu considérable, la saturation du fer ne s'obtient pas même avec les courants les plus intenses, que peut supporter le fil de la bobine.

On peut déterminer l'état magnétique d'un système quelconque, formé de bobines et de fer, à l'aide de deux méthodes :

La première consiste à mesurer le champ magnétique produit. Ce

(1) Voir MASCART et JOUBERT, *Leçons d'électricité*, p. 601.

champ se mesure soit à l'aide du magnétomètre de Gauss, soit par la méthode de Weber (déplacement d'une bobine dans le champ magnétique), soit enfin par la méthode proposée par M. Leduc ⁽¹⁾, laquelle est fondée sur le même principe que le galvanomètre à mercure de M. Lippmann;

L'autre méthode consiste à utiliser l'induction mutuelle que le système exerce sur un circuit extérieur; elle a été préconisée spécialement par M. Rowland ⁽²⁾ et après lui par M. Bosanquet ⁽³⁾.

Ces méthodes demandent toutes un agencement extérieur au système qu'on désire examiner. D'ailleurs une bobine fermée sur elle-même et enroulée régulièrement, ne fournit pas de champ magnétique extérieur; la première méthode est donc complètement en défaut dans ce cas.

M. Rowland s'est servi spécialement d'anneaux ou de tores pour la détermination de la perméabilité magnétique du fer, du nickel et du cobalt. Il est à remarquer que la détermination du coefficient de self-induction permet, tout aussi bien que l'induction mesurée par M. Rowland, d'évaluer cette perméabilité. Pour un tore on a, en effet,

$$L = 4\pi^2 n (R - \sqrt{R^2 - 4^2}) (1 + 4\pi k);$$

la mesure de L permet donc de déterminer k . Il faut remarquer que la valeur de k ainsi trouvée se rapporte à la masse totale de fer: elle donne, par conséquent, la valeur moyenne de k ; tandis qu'une bobine extérieure au tore ne peut donner que l'effet produit en un seul endroit, celui où se trouve la petite bobine.

Il n'existe actuellement aucun moyen pratique permettant d'étudier le magnétisme produit par les aimants inducteurs d'une machine dynamo, car la mesure directe du champ magnétique produit, offre de grandes difficultés. L'examen de la caractéristique fournit bien quelques indications, mais on sait que cette courbe ne représente pas l'intensité du champ magnétique, puisque dans toutes les machines on observe une chute de potentiel aux bornes pour de grandes intensités de courant. Si on connaissait la courbe représentant l'effet du magnétisme on pourrait déterminer la grandeur de cette chute. De plus, la caractéristique ne peut se déterminer que dans le cas où la machine est entièrement construite et fonctionne normalement; or, il peut être intéressant de connaître la variation du champ magnétique pour une machine en construction.

La connaissance du coefficient de self-induction fournit un autre moyen pour évaluer l'état magnétique d'un électro-aimant, car il existe une relation simple entre ces deux grandeurs.

On sait, en effet, que dans un système formé de bobines renfermant du fer doux, le flux d'induction se conserve, et qu'à l'extérieur des masses de

(1) LEDUC, C. R., 24 juillet 1884.

(2) ROWLAND, *Phil. mag.*, 1873 et 1874.

(3) BOSANQUET, *Phil. mag.*, 1884 et 1885.

fer, le flux d'induction se confond avec le flux de force magnétique. Or le flux de force est le produit de l'intensité du champ magnétique par la surface et, d'autre part, le flux d'induction est égal au produit du coefficient de self-induction par l'intensité de courant. Il s'ensuit que ce dernier produit est proportionnel à l'intensité du champ magnétique, tant que les lignes de force ne changent pas de position. En général, la distribution des lignes de force varie légèrement dans un système de bobines renfermant du fer, comme l'a montré M. Rowland ⁽¹⁾; dans un aimant en forme de barre, par exemple, les pôles se rapprochent vers les extrémités, lorsqu'on augmente l'intensité du courant dans la bobine. Cependant cet effet est assez faible, surtout pour des systèmes magnétiques fermés.

Nous avons cherché par l'expérience jusqu'à quel degré la proportionnalité en question subsiste et, à cet effet, nous avons déterminé simultanément l'intensité du champ magnétique et le coefficient de self-induction.

PREMIÈRE SÉRIE D'EXPÉRIENCES

Moment magnétique et coefficient de self-induction d'une bobine cylindrique sans noyau de fer

Dans ce cas, le coefficient de self-induction est une constante et la proportionnalité est rigoureuse, conformément à la théorie.

C'est donc surtout au point de vue de la partie expérimentale et pour

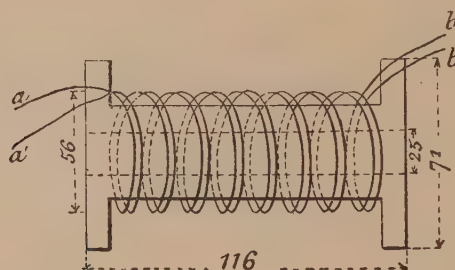


FIG. 14

justifier les méthodes employées que nous avons entrepris ces expériences.

La bobine que nous avons employée contenait 7 couches de fil de 2 millimètres; l'enroulement était double. On peut donc se servir de ces bobines sans induction, en réunissant *a* et *a'*, ou avec induction en réunissant *a'* et *b'* et prenant les contacts en *a* et *b*. Pour établir de bons contacts, on fait plonger les extrémités *a b a' b'* dans des godets de mercure, après les avoir amalgamés soigneusement. On peut donc sans déranger la bobine réaliser les différents cas dont nous venons de parler. Ceci n'est pas sans avantages,

(1) ROWLAND. *Phil. mag.*, t. XLVI, p. 142, 1873.

car, pour s'assurer que toutes les autres branches de pont sont dépourvues de coefficient de self-induction, on commence par arranger la bobine en bobine différentielle (en réunissant a et a') et on constate qu'après avoir établi l'équilibre du pont, le galvanomètre ne donne pas d'impulsion, lorsqu'on coupe le circuit de la pile.

Nous avons mesuré les valeurs du coefficient de self-induction L par les méthodes exposées au chapitre III, en nous servant d'un galvanomètre apériodique Deprez-d'Arsonval, (employé dans les conditions énoncées).

Le même galvanomètre servait à la mesure de l'intensité de courant.

Établissement du pont

La bobine se trouve en R ; elle est formée, comme nous l'avons dit, de deux fils dont voici les résistances :

Fil $a\ b$	0.1101 ohm
Fil $a'\ b'$	0.1123 ohm
Ensemble.....	0.2224 ohm

La mesure directe a donné pour la résistance totale 0,2226 ohm, ce qui donne une erreur de $1/10000$ ohm pour chaque mesure. En R' il y a une

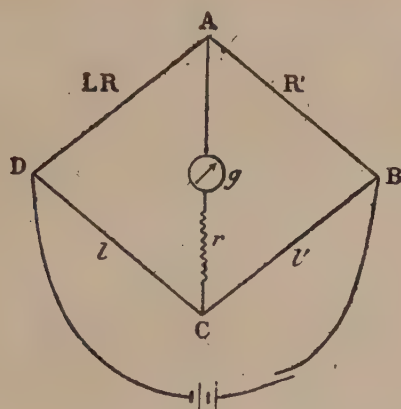


FIG. 15

résistance formée par 4 bobines de 0,2 ohm chacune, réunies en quantité : cette résistance mesurée directement est de 0,0510 ohm. Le fil de ces bobines est en maillechort et a un diamètre de 3 millimètres. Les branches BC et CD sont formées par des boîtes de résistance ordinaire, sans induction et on a $DC = l = 42$ ohms $CB = l' = 10,07$ ohms.

Sources d'électricité

Pour de faibles intensités on s'est servi de petits éléments Daniell, ou Bunsen et pour des intensités plus fortes, d'une série d'accumulateurs

Faure, pesant environ 10 kilos chacun. Ces appareils fournissent des courants très énergiques ; ils sont très commodes pour les essais dont nous nous occupons ici. Seulement lorsqu'on demande à ces accumulateurs un courant au-dessus du régime normal, l'intensité tombe rapidement et il faut effectuer toutes les mesures en quelques secondes.

Pour rompre le courant, on avait intercalé dans le circuit de la pile un contact à mercure : dans le godet se trouvait un mélange d'eau et d'alcool. On observe toujours le fait bien connu que l'établissement du courant prend un temps relativement long, tandis que la décharge est instantanée. Comme les oscillations du galvanomètre sont très rapides, on constate que l'extra-courant de fermeture donne une impulsion plus faible que l'extra-courant de rupture, ce qui provient du temps nécessaire à la charge. Aussi, dans toutes nos mesures avons-nous pris l'extra-courant de rupture, ce qui fournit des résultats bien concordants.

Galvanomètre

C'est le même galvanomètre apériodique Deprez-d'Arsonval qui sert à la détermination du coefficient de self-induction et à la mesure de l'in-

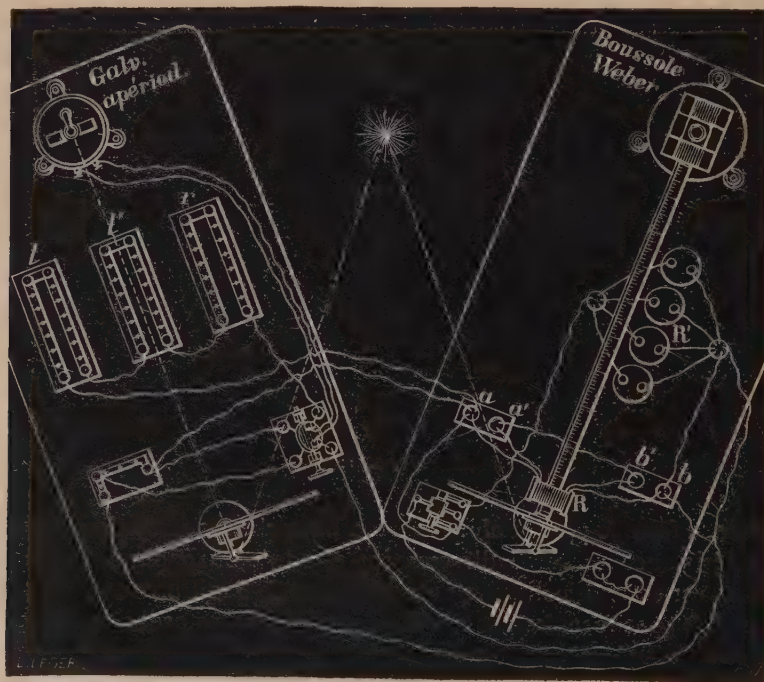


FIG 10

tensité du courant. A cet effet, on dispose un commutateur qui permet d'effectuer instantanément le changement.

Pour la détermination du coefficient de self-induction, la résistance totale du circuit galvanométrique doit toujours rester la même; cette résistance, avec celle des branches du pont, doit être égale à la résistance qui rend le galvanomètre apériodique, mais sur le point de devenir périodique. Dans nos expériences, cette résistance était de 115 ohms et il est facile de calculer l'influence des branches du pont; si ρ représente cette résistance réduite, on a :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{R+l} + \frac{1}{R'+l'}$$

ce qui donne dans notre cas $\rho = 8$ ohms.

Il faut donc ajouter au circuit du galvanomètre une résistance de $115 - 8 = 107$ ohms.

Pour la mesure de l'intensité du courant dans la bobine, on prend, à

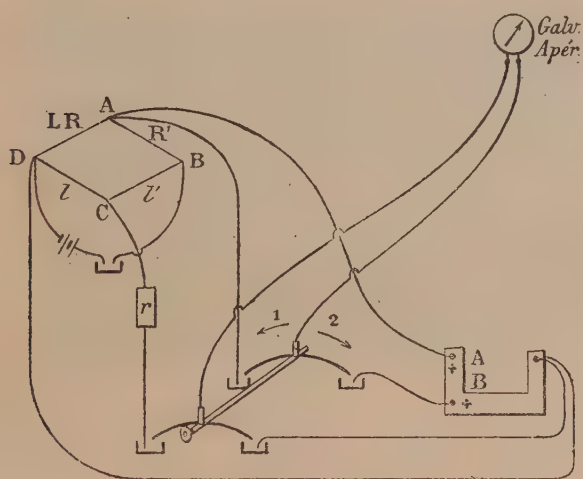


FIG. 17

l'aide du même galvanomètre, la différence de potentiel aux bornes. On se sert pour ces mesures d'un shunt disposé d'une manière spéciale ⁽¹⁾; ce shunt est arrangé de telle façon que chaque millimètre de l'échelle corresponde à 1/100 de volt. Pour des intensités ordinaires, on prend l'ensemble des deux fils, ce qui fait que chaque volt correspond à environ 5 ampères (exactement 1/0,2124); pour de fortes intensités, on prend la différence de potentiel aux extrémités du fil $a b$ et chaque volt correspond à environ 10 ampères (1/0,1101). Dans ces conditions, il se trouve intercalé dans le circuit du galvanomètre une résistance de 9000 ohms environ et une dérivation de 200 ohms; cette dernière résistance sert à maintenir au galvanomètre sa propriété d'apériodicité.

(1) Voir *La Lumière Électrique*, t. XVII, p. 213.

L'ensemble de cette disposition se trouve figuré dans le croquis ci-joint (fig. 16). Toutes les lettres se rapportent à la figure théorique. Le magnétomètre (dont nous nous occuperons plus loin) se trouve à droite, et, les deux échelles, étant placées à angle droit, permettent à l'opérateur de suivre facilement les images. On ne peut mettre les deux instruments l'un à côté de l'autre, car le magnétomètre se trouverait influencé. Le commutateur se trouve reproduit avec les détails dans la figure schématique 17. En tournant le commutateur dans le sens de la flèche 1, la résistance r se trouve intercalée dans le circuit, et le galvanomètre sert pour la mesure de self-induction. Si l'on tourne le commutateur dans le sens de la flèche 2, le galvanomètre sert à déterminer la différence de potentiel aux bornes de la bobine. On voit donc que ces mesures peuvent s'effectuer très vite, car le mouvement du cadre est très rapide et le galvanomètre est toujours absolument apériodique.

Dans ces expériences, c'est l'impulsion correspondant à la rupture du courant, que nous avons toujours observée, car, ainsi que nous l'avons vu à la fin du deuxième chapitre, il faut que la durée de la charge ne soit qu'une petite fraction de la durée d'une oscillation.

La capacité électro-magnétique d'un électro-aimant est déterminée par la formule

$$C = \frac{L}{r(r + r')},$$

r étant la résistance de la bobine et r' la résistance extérieure. La durée de la charge au centième a pour expression

$$t = \frac{L}{r} \log \text{nép } 100 = 4,6 \frac{L}{r}$$

Nous avons trouvé à la fin du chapitre précédent, pour les petits électro-aimants sans fer

$$\frac{L}{r} = 0,0035 \quad \text{d'où } t = 4,6 \times 0,0035 = 0,016$$

Avec les noyaux de fer, la valeur de L est décuplée d'où $t = 0,16$, cette durée est comparable à la durée d'oscillation $T = 0,38$.

La décharge s'effectue toujours dans un temps qui est pratiquement infiniment petit.

Dans certains cas l'impulsion due à la charge n'est que la moitié environ de l'impulsion due à la décharge.

Pour la mesure de la différence de potentiel aux bornes, on avait vérifié directement l'exactitude de la graduation, par rapport aux indications de petits éléments Daniell. La force électromotrice de ces éléments Daniell était déterminée par la décharge d'un condensateur en prenant pour terme de comparaison trois éléments L. Clark, de force électromotrice connue.

Ces trois éléments L. (Clark dont l'un était d'origine anglaise), n'avaient pas une différence de force électromotrice supérieure à 1/500 de volt à la même température. On sait que la valeur de 1,457 volt donné

par Clark se rapporte à l'ohm de l'association britannique et que, rapportée à l'ohm légal, la force électromotrice devient égale à 1,44 volt.

Magnétomètre

On a mesuré le moment magnétique de cette bobine par la méthode de Gauss, à l'aide d'un magnétomètre de Weber rendu apériodique, en entourant l'aimant dévié d'une enveloppe de cuivre rouge, (fig. 18). Cet appareil permettait, en même temps, de ramener l'aimant dévié dans le champ de vision, lorsque la déviation était trop forte. Il suffisait, pour cela, de lancer dans la boussole un courant faible et bien constant, dont on avait fixé, par des expériences préalables, l'influence sur le barreau mobile. La lecture était faite à l'aide d'une échelle transparente, placée à 1,50 m. environ du barreau dévié.

Avant de commencer les mesures, on a pris soin de vérifier que le ma-



FIG. 18

gnétomètre n'éprouve pas de déviations provenant de l'action directe du circuit. Il suffit pour cela de monter la bobine en différentiel et de constater qu'il n'y a aucune déviation lorsqu'on fait passer le courant. On constate en même temps que le galvanomètre n'indique l'existence d'aucun extra-courant provenant des autres branches du pont.

Resultats

Le tableau suivant contient les résultats d'une série d'observations.

Intensité du courant I	Déviation du magnétomètre M	Impulsion due à l'extra-courant q
ampères	c. m.	c. m.
0,95	0,3	0,2
3,25	1,2	1,0
6, 1	2,0	2,0
7, 0	2,3	2,2
14, 0	4,5	4,5
21, 2	6,6	6,9

Ces résultats ont été résumés dans les courbes de la figure 19; nous avons pris pour abscisses les intensités du courant en ampères, et pour ordonnées les indications du galvanomètre et du magnétomètre: l'échelle des ordonnées est donc une échelle arbitraire mais nous nous occuperons ensuite des mesures en valeurs absolues.

Les expériences actuelles n'ont été entreprises que pour montrer la pro-

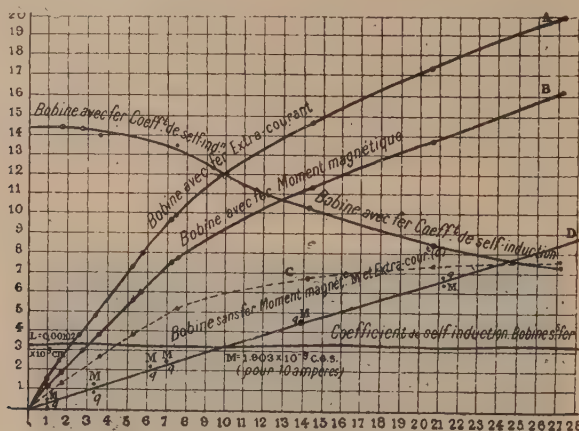


FIG. 19

portionnalité entre l'effet magnétique et la quantité totale d'électricité mise en jeu par l'extra-courant, — quantité qui est elle-même proportionnelle au produit du coefficient de self-induction L par l'intensité du courant I . On voit qu'on obtient dans ce cas une ligne parfaitement droite, ce qui est d'accord avec la théorie, car le coefficient de self-induction est constant et le moment magnétique est proportionnel à l'intensité du courant.

Valeurs absolues

Pour réduire les mesures précédentes en valeurs absolues, il suffit d'appliquer les formules données dans le chapitre précédent.

Pour le coefficient de self-induction on a la formule

$$L = \frac{T}{\pi} \frac{i}{\alpha} e^{\frac{\delta}{I}} \left[(R' + l') \frac{R}{R'} + g \left(\frac{R}{R'} + 1 \right) \right]$$

On a ici

$$R = 0,2224 \text{ ohm} \quad R' = 0,051 \quad \frac{R}{R'} = 4,36$$

$$l = 42 \quad l' = 10,07$$

$$g = 222 + 115 = 387 \text{ ohms}$$

$$T = 0,386 \quad \frac{i}{\alpha} = \frac{10-6}{0,193}$$

et

$$\frac{\delta}{I} = \frac{3,2}{10}$$

La valeur de la parenthèse est donc

$$(R' + l' + g) \frac{R}{R'} + g = (0,051 + 10,07 + 337) 436 + 337 = 1850$$

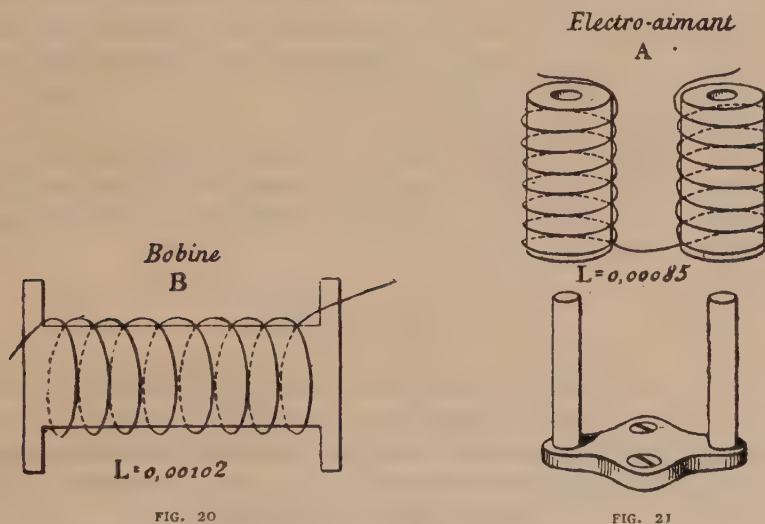
En effectuant les calculs on trouve

$$L = 0,00102 \times 10^9 \text{ centimètres}$$

Cette valeur est un peu supérieure à la valeur du coefficient de self-induction trouvée pour l'électro-aimant à gros fil, sans noyau de fer doux: on avait trouvé, en effet,

$$L = 0,00085 \times 10^9 \text{ centimètres}$$

Or, il est à remarquer que les bobines formant l'électro-aimant et la bobine dont il s'agit ici, sont enroulées avec la même longueur du même fil, et



que, dans chaque cas, il y a sept couches de fil. La résistance est également la même dans les deux cas : 0,234 ohm pour l'électro-aimant et 0,222 ohm pour la bobine. La bobine unique B (fig. 20) peut être considérée comme formée par les deux bobines de l'électro-aimant A, qu'on aurait réunies bout à bout (fig. 21). Il faut que le coefficient de self-induction de la bobine soit légèrement supérieur à celui de l'électro-aimant, car dans la bobine unique les spires sont plus rapprochées, puisqu'il n'y a pas d'interruption au milieu ; on voit que l'expérience vérifie ces faits.

Il est également très facile de réduire les indications du magnétomètre en mesures absolues et d'en déduire le moment magnétique de la bobine.

On a, en effet, comme formule de première approximation

$$\frac{M}{H} = \frac{1}{D^3} \operatorname{tg} \delta$$

Prenons par exemple, le courant de 10 ampères, pour lequel on a

$$\delta = \frac{3,2}{2 \times 120}$$

l'échelle se trouvant à 1,20 m. du miroir mobile. On a, d'ailleurs, $D = 110 \text{ cm}$ et $H = 0,19 \text{ C. G. S.}$ d'où

$$M = 0,19 \times \frac{1}{110^3} \times \frac{3,2}{2 \times 120} = 1,903 \times 10^{-9} \text{ C. G. S.}$$

Si la bobine pouvait être considérée comme un solénoïde de très grande longueur, on pourrait calculer le moment magnétique en partant des dimensions et de l'intensité du courant; on peut même effectuer ce calcul pour une bobine de forme cylindre quelconque, pourvu que l'enroulement soit bien régulier ⁽¹⁾.

On peut aussi calculer le coefficient de self-induction d'une bobine cylindrique, lorsque les spires ont été enroulées avec un soin particulier. Des bobines de ce genre ont été employées pour la détermination de l'ohm. Pour une bobine comme celle dont nous nous occupons, ce calcul ne donnerait pas de résultat.

En résumé nous avons vu que, dans le cas d'une bobine sans fer, l'expérience est d'accord avec la théorie et que la quantité d'électricité fournie par l'extra-courant est bien proportionnelle au moment magnétique, ou encore au champ magnétique produit par la bobine.

DEUXIÈME SÉRIE D'EXPÉRIENCES

Moment magnétique de coefficient de self-induction d'une bobine cylindrique renfermant un noyau de fer doux

Dans cette série d'expériences, nous avons déterminé simultanément le moment magnétique et le coefficient de self-induction d'une bobine cylindrique dans laquelle on place un noyau de fer doux.

Nous avons employé la même bobine et le même dispositif que dans la première série d'expériences.

Avant de donner les résultats de cette nouvelle série, nous allons considérer l'intensité du champ magnétique à l'intérieur de la bobine.

Prenons, par exemple, un courant de 20 ampères, — courant normal pour un fil de 2 millimètres, et qui le chauffe déjà assez rapidement pour détruire l'équilibre du pont; nous le lançons dans une bobine qui a 7 couches et 4 fils par centimètre. Si donc on considère la bobine comme étant de longueur indéfinie, l'intensité du champ magnétique à l'intérieur sera donnée par la formule

$$F = 4 \pi n I$$

(1) J. STUART. *Phil. Mag.*, t. 46, p. 231.

ce qui donne pour $I = 20$ ampères (ou 2 unités C. G. S).

$$F = 4\pi \times 4 \times 2 \times 7 = 672 \text{ C. G. S.}$$

Le maximum d'intensité que nous avons pu atteindre est 40 ampères : on a dans ce cas :

$$F = 1344 \text{ C. G. S.}$$

On a introduit dans cette bobine plusieurs noyaux de fer doux. Un de ces noyaux s'adaptait exactement à l'intérieur de bobine et avait la même longueur qu'elle.

Selon Muller⁽¹⁾ il faudrait pour produire le maximum d'aimantation, un champ magnétique ayant une intensité de 135. C. G. S⁽²⁾.

On verra d'après les expériences suivantes qu'une intensité dix fois plus

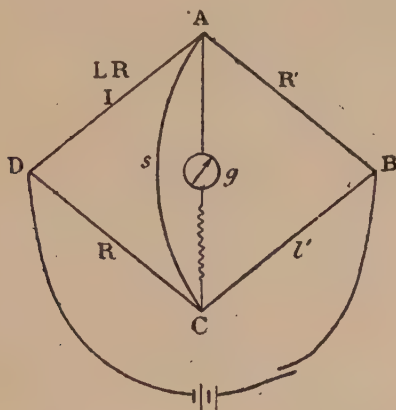


FIG. 22

forte est encore insuffisante pour saturer le cylindre de fer introduit dans la bobine.

Cette intensité dépend d'ailleurs de la masse de fer introduite. Les expériences suivantes montrent que dans des champs beaucoup plus faibles, de petites masses de fer se saturent complètement, tandis qu'il faut des intensités très considérables pour saturer des masses de fer plus fortes. Nous ne connaissons aucun travail entrepris dans le but d'éclaircir cette question.

Nous arrivons maintenant aux résultats de cette deuxième série d'expériences.

Rappelons que les expériences de la première série, effectuées sur la

(1) BLAVIER. *Des Grandeurs électriques*, p. 287.

(2) Ce nombre est de 1350, lorsqu'on prend pour unités fondamentales, le mètre, le gramme et la seconde.

bobine sans fer, ont montré que le moment magnétique et la quantité d'électricité produite par l'extra-courant sont figurées par des droites qui se confondent, lorsqu'un de leurs points coïncide; le coefficient de self-induction est constant et représenté par une droite parallèle à l'axe des x .

Lorsqu'on introduit un noyau de fer doux à l'intérieur de la bobine, ces lignes deviennent des courbes.

Nous avons introduit dans la même bobine, successivement :

1° Un noyau de fer doux, s'adaptant exactement à l'intérieur de la bobine et ayant même longueur dont voici les dimensions : longueur 11.9 c. m., diamètre 2,45 c. m., poids 431 grammes.

2° Un paquet de fils de fer de même dimension extérieure que le cylindre plein précédent. Ce paquet est constitué par environ un millier de fils dont le poids est de 295 grammes.

3° Un petit cylindre de fer doux, dont voici les dimensions : longueur 10,07 c. m., diamètre 90 centimètres, poids 49,5 gr.

4° Un tube renfermant de la limaille de fer.

Avant d'exposer les résultats de ces expériences, nous allons procéder à la vérification des formules relatives au shunt, formules que nous n'avons pas vérifiées dans le chapitre précédent.

Nous avons trouvé les formules suivantes :

$$\int_{s=\infty} i_s dt = \frac{LI}{(R' + l') \frac{l}{l'} + g \left(\frac{l}{l'} + 1 \right)} = \frac{LI}{R + l + g \left(\frac{l}{l'} + 1 \right)}$$

$$\int_s i_s dt = \frac{LI}{(R' + l') \frac{l}{l'} + g \left(\frac{l}{l'} + 1 \right) + g \frac{l}{l'} \frac{R' + l'}{s}} = \frac{LI}{R + l + g \left(\frac{l}{l'} + 1 \right) + g \frac{R + l}{s}}$$

Le rapport dans lequel l'impulsion se trouve réduite, par suite de l'introduction du shunt s , est donc

$$\frac{\int_{s=\infty} i_s dt}{\int_s i_s dt} = \frac{(R' + l') \frac{l}{l'} + g \left(\frac{l}{l'} + 1 \right) + g \frac{l}{l'} \frac{R' + l'}{s}}{(R' + l') \frac{l}{l'} + g \left(\frac{l}{l'} + 1 \right)} = \frac{R + l + g \left(\frac{l}{l'} + 1 \right) + g \frac{R + l}{s}}{R + l + g \left(\frac{l}{l'} + 1 \right)}$$

Comme dans le cas actuel $R' + l' = 10,00 + 0,051 = 10,1$ ohms, n'est qu'une faible fraction de $g = 337$, on peut, comme première approximation, négliger ces termes et écrire :

$$\frac{\int_{s=\infty} i_s dt}{\int_s i_s dt} = 1 + \frac{\frac{l}{l'} \frac{R' + l'}{s}}{\frac{l}{l'} + 1} = 1 + \frac{\frac{R + l}{s}}{\frac{l}{l'} + 1}$$

On trouverait avec le même degré d'approximation, pour le facteur de

réduction, lorsqu'on donne au shunt s une valeur s' , l'expression

$$\frac{\int_s i_0 dt}{\int_{s'} i_0 dt} = \frac{\frac{l}{l' + 1} + \frac{l}{l'} \frac{R' + l'}{s'}}{\frac{l}{l' + 1} + \frac{l}{l'} \frac{R' + l'}{s}} = \frac{\frac{l}{l' + 1} + \frac{R + l}{s'}}{\frac{l}{l' + 1} + \frac{R + l}{s}}$$

Pour vérifier ces formules, on avait dans les expériences actuelles

$$R + l = 0,22 + 44 = 44,22 \text{ ohms}$$

$$\frac{l}{l'} = 4,36$$

$$R' + l' = 10,07 + 0,51 = 10,1 \text{ ohms}$$

Considérons d'abord le cas où l'on donne à s une valeur de 6 ohms ; le facteur devient dans ce cas

$$1 + \frac{4,36 \times \frac{10,1}{6}}{5,35} = 2,38$$

Voici quelques unes de mes observations :

1° L'impulsion initiale, sans shunt, étant de 9,8 c. m. l'introduction d'un shunt de 6 ohms a réduit cette impulsion à 4,1 c. m.

Or $\frac{9,8}{2,38} = 4,1$

2° Dans un autre cas, l'impulsion sans shunt était de 10,4 c. m. et le shunt de 6 ohms a réduit cette impulsion à 4,5 c. m.

Or $\frac{10,4}{2,38} = 4,4$

3° Impulsion sans shunt = 15 centimètres avec shunt de 6 ohms = 6,4.

Or $\frac{15,0}{2,38} = 6,3$

Autre exemple. En changeant la résistance du shunt, on a trouvé les nombres suivants :

	Observé	Calculé
$s = 6$	$\delta = 14,7$	
$s = 3$	$\delta = 9,4$	9,4
$s = 1$	$\delta = 3,9$	3,85

Citons, comme dernier exemple, le cas suivant. Avec un shunt de 6 ohms, l'impulsion était de 10,1 c. m. et avec un shunt de 3 ohms elle était réduite à 6,5 c. m.

Or, en appliquant la formule précédente, on a

$$\frac{\frac{l}{l'} + 1 + \frac{l}{l'} \frac{R' + l'}{s}}{\frac{l}{l'} + 1 + \frac{l}{l'} \frac{R' + l'}{s}} = \frac{5,36 + 4,36 \frac{10,1}{3}}{5,36 + 4,36 \frac{10,1}{6}} = 1,58$$

Et

$$\frac{10,1}{1,58} = 6,4$$

au lieu de 6,5

On voit que, dans tous ces cas, l'accord est très satisfaisant.

Voici maintenant les résultats des expériences. Nous commencerons par exposer ceux qui sont relatifs au petit cylindre de fer doux (n° 3), car dans ce cas le fer se sature complètement, ce qui n'a plus lieu avec le gros cylindre.

Nous ne reproduisons pas les tableaux d'expériences, mais nous avons tracé des courbes qui en sont l'image (fig. 19 et fig. 23). Les points observés sont indiqués sur les courbes.

La courbe inférieure B (fig. 19), reproduit les variations du moment magnétique et la courbe supérieure A celles de l'extra-courant.

La ligne droite D se rapporte à la bobine sans fer et, en retranchant les ordonnées correspondantes au moment magnétique, on peut tracer la courbe C se rapportant uniquement au noyau de fer. On voit que la saturation commence vers 7 ampères et qu'elle est presque complète à 14 ampères, *tout en augmentant encore un peu.*

La proportionnalité entre l'extra-courant et le moment magnétique, est parfaite dans ce cas, car les ordonnées des deux courbes se superposent lorsqu'on les réduit dans une proportion donnée. En diminuant de 1/5 les ordonnées de la courbe supérieure (représentant l'effet dû à l'extra-courant), elle coïncide avec la courbe représentant le moment magnétique.

Quant au coefficient de self-induction il est représenté par deux droites parallèles à l'axe des x qui se raccordent. En effet, pour de faibles intensités, l'extra courant est représenté par une ligne droite, et le même fait se reproduit pour des intensités très considérables, lorsque le fer est saturé.

L'introduction du cylindre de fer a augmenté le coefficient de self-induction dans un rapport de 1 à 4,5, pour de faibles intensités, et dans un rapport de 1 à 2,3 pour de fortes intensités.

On a discuté beaucoup dans ces derniers temps sur la formule pouvant représenter l'état de saturation dans un électro-aimant.

Ordinairement on accepte la formule de M. Frélich

$$M = \frac{A i}{1 + \alpha i}$$

formule dans laquelle α est un facteur qui dépend de la saturation du fer. Cette formule donne de bons résultats lorsqu'on l'applique à la théorie des machines dynamo-électriques. Les résultats s'accordent si bien avec l'expérience que M. S. Thompson prétend que la formule de M. Frélich doit

exprimer la loi naturelle du phénomène et M. Thompson croit pouvoir arriver à la déduction de cette loi par la théorie du magnétisme de Lamont.

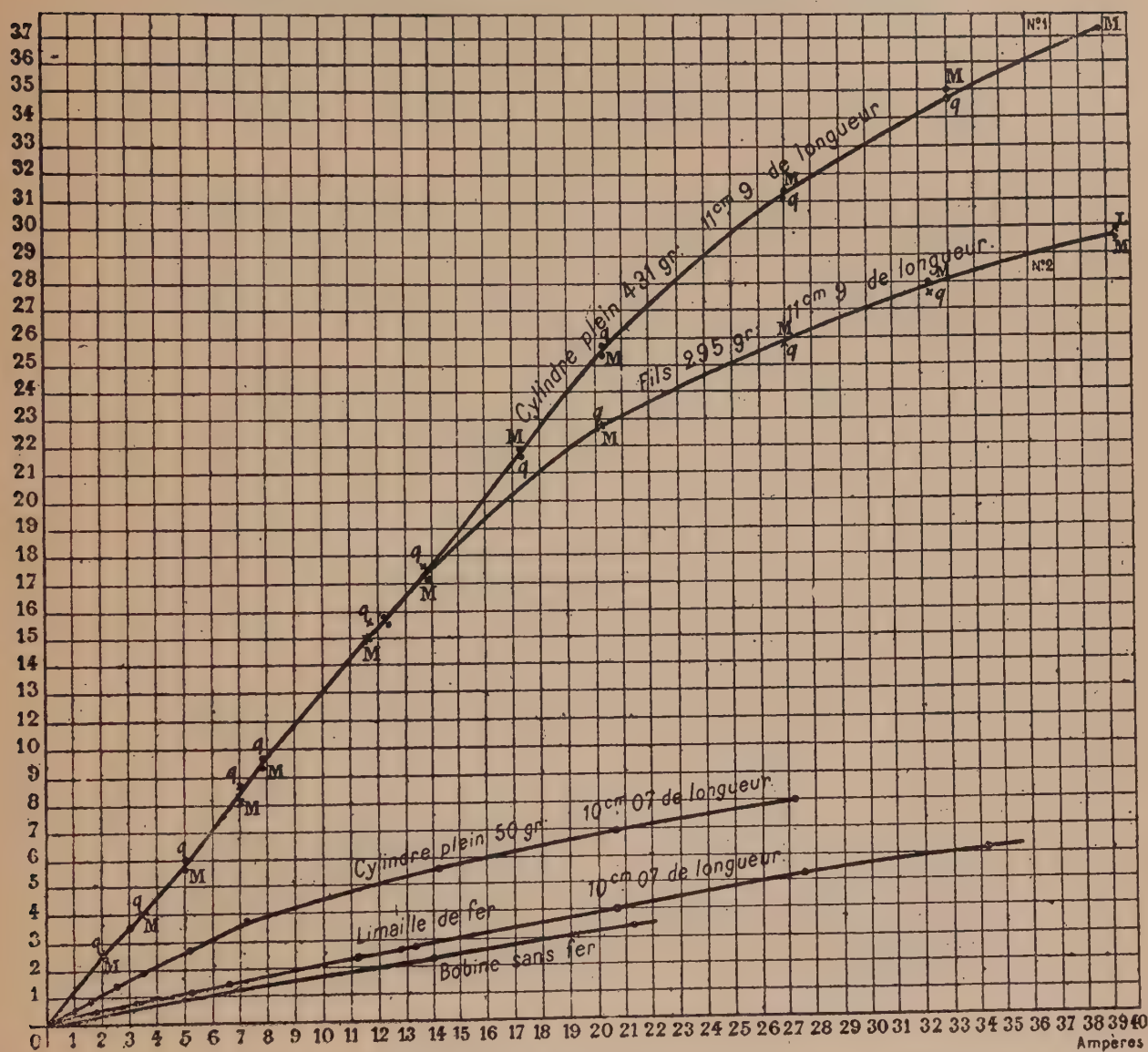


FIG. 23

En développant en série la formule de Lamont, on arrive, en effet, comme première approximation, à une formule ayant la forme de celle de M. Frœlich. Tout récemment, M. Frœlich ⁽¹⁾ a fait remarquer que les

⁽¹⁾ FRÖELICH, *Electrotechnische Zeitschrift*, IV, p. 163, 1886.

deux formules sont cependant tout à fait distinctes et qu'elles reposent notamment sur des équations différentielles différentes.

On peut faire remarquer que, s'il y a proportionnalité entre l'extra-courant et le moment magnétique, on aurait

$$Li = \frac{Mi}{1 + \alpha i}$$

d'où

$$L = \frac{M}{1 + \alpha i}$$

ce qui représente de nouveau une hyperbole, ayant pour asymptote l'axe des x .

Comme la courbe qui figure les variations du coefficient de self-induction a deux points d'inflexion, elle ne peut pas être représentée par une hyperbole. D'ailleurs les courbes que nous avons obtenues ne s'adaptent pas très bien aux courbes de M. Frélich.

Revenons maintenant aux expériences avec les noyaux de fer doux.

Avec le noyau plein on a obtenu la courbe n° 1, (fig. 23). Les indications du magnétomètre portent la lettre M et les impulsions dues à l'extra-courant la lettre q . Les indications du magnétomètre ont été multipliées par 0,5 et celles du galvanomètre par 0,4. Dans ces conditions, les ordonnées des deux courbes coïncident et la loi de la proportionnalité est satisfaite. On a, d'ailleurs, rapporté sur la même figure l'effet de la bobine sans fer, et l'on a diminué les ordonnées également dans le rapport de 2 à 1.

On constate que la saturation ne commence qu'au delà de 20 ampères et que le fer à 40 ampères est loin d'être saturé.

La première portion de la courbe est parfaitement droite.

Comme deuxième expérience, on a introduit dans la bobine un paquet de fer, de mêmes dimensions que le cylindre plein ; dans ces conditions, la saturation commence plus tôt.

On voit que l'effet magnétique pour de faibles courants est le même pour le paquet de fil que pour le cylindre plein, bien qu'il y ait une grande différence de poids : 431 grammes et 295 grammes. Quant à l'extra-courant, on a dû augmenter les ordonnées de 5 0/0 pour amener la coïncidence. L'effet dû à l'extra-courant est donc un peu plus faible pour le paquet de fils employé que pour le cylindre de fer, bien qu'ils aient, tous les deux pour de faibles courants, les mêmes moments magnétiques.

La proportionnalité est aussi très rigoureuse dans ce cas.

TROISIÈME SÉRIE D'EXPÉRIENCES

Champ magnétique et coefficient de self-induction d'un système d'électro-aimants dans le genre des inducteurs d'une machine dynamo-électrique de Siemens

Ces expériences ont été réalisées sur le champ magnétique du galvanomètre Deprez-D'Arsonval à électro-aimants. Le système d'inducteurs de

cet instrument est une réduction exacte de celui d'une dynamo Siemens; on peut donc supposer que, pour ce qui concerne la production du champ magnétique, une machine réelle se comporte d'une manière analogue.

L'intensité du champ magnétique a été mesurée d'après les constantes du galvanomètre; on a établi dans un chapitre précédent la formule

$$F = \frac{\pi^2}{T^2} \frac{\alpha}{i} \Sigma m r^2 \frac{1}{S n}.$$

Les valeurs du moment d'inertie $\Sigma m r^2$ et la durée T d'une oscillation simple, à circuit ouvert, ont été également déterminées précédemment.

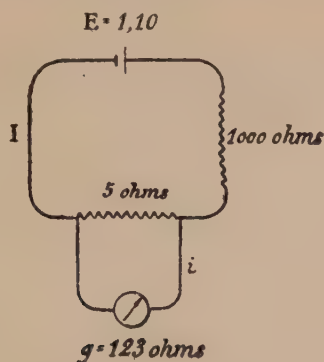


FIG. 24

La constante $\frac{\alpha}{i}$ se mesure par la méthode ordinaire : on a ici

$$\alpha = \frac{d}{2 D},$$

d étant la déviation en centimètres et D la distance du miroir à l'échelle également en centimètres.

S est la surface du cadre mobile, et n le nombre de tours de fil sur le cadre.

Dans le cas qui nous occupe, on a :

$$\begin{aligned} T &= 0,2915 \\ \Sigma m r^2 &= 6,687 \text{ C.G.S.} \\ D &= 95 \text{ centimètres} \\ S &= 6,65 \text{ c. m.} \times 3,0 \text{ c. m.} \\ n &= 285 \end{aligned}$$

Pour obtenir F en unités C. G. S., il faut exprimer i non en ampères, mais en unités C. G. S. On a trouvé par exemple que, pour une intensité de 4,4 ampères du courant inducteur, la déviation était de 10,3 c. m. Lorsqu'on

emploie un élément Daniell de *f. é. m.* égale à 1,10 volt et qu'on introduit dans son circuit (fig. 24) une résistance de 1005 ohms, le galvanomètre étant mis en dérivation sur la résistance de 5 ohms, on trouve en négligeant la résistance intérieure de la pile, et en représentant par *i* l'intensité du courant dans le galvanomètre,

$$i = \frac{E}{1005} \times \frac{5}{128} = 43 \times 10^{-6} \text{ ampères}$$

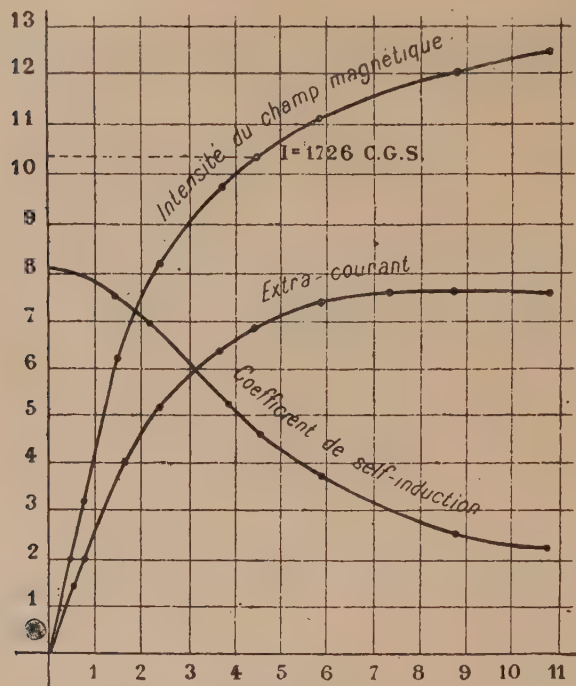


FIG. 25

On a donc, pour 1 micro-ampère (ou 10^{-7} unités C. G. S.) une déviation de

$$\frac{10,3}{43} = 0,24 \text{ c. m.}$$

ce qui donne :

$$\frac{\alpha}{i} = \frac{0,24}{2 \times 95} \times \frac{1}{10^{-7}}$$

On trouve ainsi, tous calculs faits,

$$F = 1726 \text{ C. G. S.}$$

Le diamètre du fil des inducteurs étant de 1 millimètre, on peut considérer l'intensité de 4,4 ampères, comme l'intensité normale, pour que le fil ne s'échauffe pas. L'inspection des courbes de la figure 25, montre que,

pour cette intensité, le fer est presque saturé : on peut donc considérer la valeur de $F = 1700$ C. G. S. comme valeur maximum normale. Nous pouvons ajouter que pour un des galvanomètres Deprez-d'Arsonval à aimants permanents, nous avons trouvé pour l'intensité du champ magnétique la valeur de 805 C. G. S.

L'inspection des courbes qui représentent l'intensité du champ magnétique et l'extra-courant montrent que la saturation commence déjà avant 2 ampères et qu'elle est complète vers 5 à 6 ampères. Au-delà de cette intensité, les deux courbes tendent à devenir des droites s'inclinant sur l'axe des x . On voit que la proportionnalité n'est pas tout à fait rigoureuse dans ce cas, mais on constate toutefois que les variations de l'extra-courant rendent bien compte des variations et de l'état de saturation des électro-aimants.

Pour déduire de la courbe précédente celle qui représente les variations du coefficient de self-induction, on peut, comme nous l'avons fait dans les autres cas, construire la courbe :

$$L = \frac{q}{I}$$

On obtient ainsi la courbe tracée sur la fig. 15. Les ordonnées de cette courbe représentent la valeur du coefficient de self-induction.

Notre intention était de suivre également la variation du coefficient de self-induction du cadre mobile et de voir comment varie ce coefficient lorsqu'on augmente l'intensité du courant dans les inducteurs. La faible valeur de ce coefficient, jointe à la résistance relativement considérable du cadre (128 ohms) n'a pas permis d'effectuer ces mesures. La quantité d'électricité fournie par l'extra-courant, quantité qui sert de mesure au coefficient de self-induction, a pour expression

$$q = \frac{LE}{r(r' + r)}$$

dans laquelle r' est la résistance extérieure. On voit que, si r est grand, q peut devenir si petit qu'on ne peut plus le mesurer par les méthodes ordinaires. On voit d'ailleurs que si $r' = 0$, l'extra-courant est inversement proportionnel au carré de la résistance de la bobine. Ce fait explique pourquoi il est difficile de déterminer le coefficient de self-induction de grandes bobines enroulées de fil fin. On voit, d'ailleurs, que dans des machines dynamo-électriques à fil fin, l'effet dû à la self-induction doit être moins considérable que pour des bobines à gros fil. Ce fait a été mis en évidence par les expériences de M. Marcel Deprez.

QUATRIÈME SÉRIE D'EXPÉRIENCES

Expériences sur la machine Gramme

Avant de commencer l'exposé de ces expériences, nous allons nous arrêter un instant au point suivant. On sait que l'introduction d'un

noyau de fer doux dans l'intérieur d'une bobine a pour effet d'augmenter le coefficient de self-induction. Dans les expériences sur la bobine dont nous nous sommes servi (3^e série d'expériences), cette augmentation était d'environ 10 fois pour le noyau plein. Cette augmentation est due à l'aimantation de fer doux. Donc, si le fer est déjà aimanté à saturation, l'augmentation ne peut plus avoir lieu et on doit pouvoir supprimer l'influence du fer doux en aimantant le noyau à saturation.

Voici quelques expériences que nous avons entreprises dans le but de vérifier ces faits.

Nous avons d'abord déterminé le coefficient de self-induction d'une grosse bobine (fig. 26), bobine dont on se sert dans les cours pour

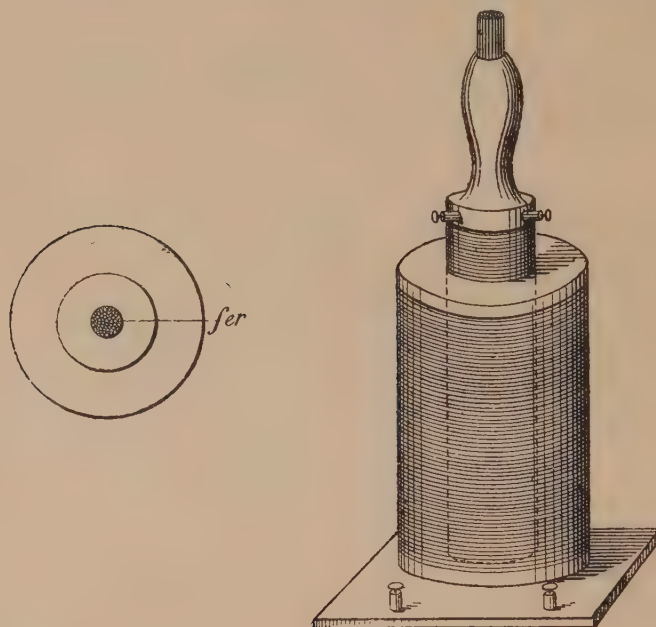


FIG. 26

montrer les lois de Faraday. A l'intérieur de cette bobine il y a une autre bobine dans laquelle s'adapte un faisceau de fils de fer. Le coefficient de self-induction de la bobine extérieure, après enlèvement du fer de la bobine intérieure, est de

$$0,107 \times 10^9 \text{ C. G. S.}$$

Puis nous avons introduit le faisceau de fils de fer dans la bobine intérieure. Le coefficient de self-induction a été déterminé de nouveau et nous avons trouvé

$$0,403 \times 10^9 \text{ C. G. S.}$$

c'est-à-dire une valeur à peu près 4 fois plus grande.

Finalement, nous avons répété la dernière expérience, mais après avoir lancé dans la bobine intérieure un courant continu et intense. Dans ces circonstances, on a trouvé pour le coefficient de self-induction de la bobine extérieure :

$$0,110 \times 10^9 \text{ C. G. S.}$$

c'est-à-dire une valeur très peu supérieure à la première.

On voit donc que l'expérience vérifie pleinement les faits prévus par la théorie et qu'on peut supprimer l'effet dû au fer par l'aimantation à saturation.

Ceci a une importance capitale pour la théorie des machines dynamo-électriques — théorie qui est encore assez obscure, particulièrement pour ce qui concerne le rôle à attribuer aux phénomènes de self-induction. Comme on emploie le plus souvent, dans les dynamos, des courants d'une intensité telle que les inducteurs commencent à être saturés, on voit que l'induction de l'anneau sur lui-même est moins considérable que celle qu'on mesure.

Dans l'expérience précédente, nous avons pris le cas où le courant qui circule autour du fer est très intense et où le courant dans la bobine est très faible, de telle sorte que la bobine ne peut pas changer la polarité du fer. Si, au contraire, le courant dans la bobine extérieure est assez fort pour neutraliser l'effet du courant intérieur, les résultats ne seraient plus les mêmes.

Voici maintenant les expériences réalisées sur les machines Gramme.

Petite machine Gramme

Nous avons d'abord opéré sur une petite machine Gramme, qui nous avait été prêtée avec beaucoup de complaisance par M. Alvergnyat. Voici les constantes de cette petite machine :

Résistance des électro-aimants...	3,87 ohms
— de l'anneau.....	2,08 —
— totale (mesurée).....	5,93 —

La résistance de l'anneau a été prise telle quelle, les balais s'appuyant sur deux secteurs opposés du collecteur. Le collecteur avait 12 segments, Dans cette machine, comme dans la plupart de ces petites machines, il y avait trop de fer relativement au fil, et, même avec les courants les plus forts compatibles avec le diamètre du fil (0,6 millimètre), les électros étaient loin d'être saturés.

Les courbes obtenues séparément pour les électros et l'anneau sont presque des lignes droites et, dans ces conditions, le courant qui circule dans les électros n'a qu'une faible influence sur le coefficient de self-induction de l'anneau.

Les courbes ont été reproduites sur la figure 27. La courbe supérieure représente l'extra-courant relatif aux électros seuls ; les autres courbes

se rapportent à l'anneau seul, l'une sans excitation des électros, l'autre, les électros étant excités par un courant aussi intense que possible. La diminution de l'extra-courant et par conséquent du coefficient de self-induction est de $1/5$ environ.

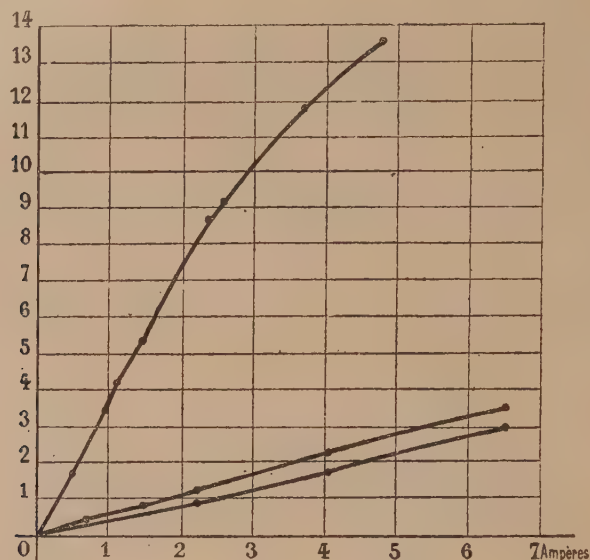


FIG. 27

Quant à la méthode de mesure, elle est identique à celle dont nous nous sommes servi pour la machine Gramme type d'atelier.

Machine Gramme, type ordinaire d'atelier

Dans ce qui précède, nous avons vu qu'il y a proportionnalité entre le produit du coefficient de self-induction par l'intensité de courant et l'intensité du champ magnétique produit par l'électro-aimant.

Il nous a paru intéressant de vérifier cette proposition directement sur une machine dynamo réelle. Nous avons employé pour cela la machine qui est le mieux connue et qui a été le plus étudiée : c'est la machine Gramme ordinaire. La maison Breguet a bien voulu mettre à notre disposition une de ces machines, grâce à l'obligeance du directeur M. Sciama.

Nous avons effectué également quelques mesures avec une machine Gramme, type d'atelier, qui se trouve au laboratoire des recherches physiques à la Sorbonne.

Avec la machine construite par la maison Breguet, nous avons effectué les expériences suivantes.

D'abord nous avons déterminé le coefficient de self-induction des inducteurs et nous avons suivi les variations de ce coefficient depuis de faibles intensités jusqu'à environ 44 ampères, le débit normal étant de 25 ampères.

Nous décrirons d'abord avec quelques détails le dispositif employé.

Pour expérimenter sur le système inducteur sans l'anneau, il suffit de desserrer les balais et de réunir les balais à l'aide d'un fil gros et court ; on attache ce fil sur les pièces métalliques des porte-balais à l'aide des vis de serrage ordinaire et on prend les contacts sur les bornes extérieures de la machine (fig. 28).

Cette machine est mise en équilibre dans un pont de Wheatstone. A cet effet (fig. 29), on met en AB une résistance bien connue et formée de fil assez gros pour qu'aucun échauffement ne soit possible. Le fil sur les inducteurs de la machine Gramme a un diamètre de 3,4 m.m. ; nous

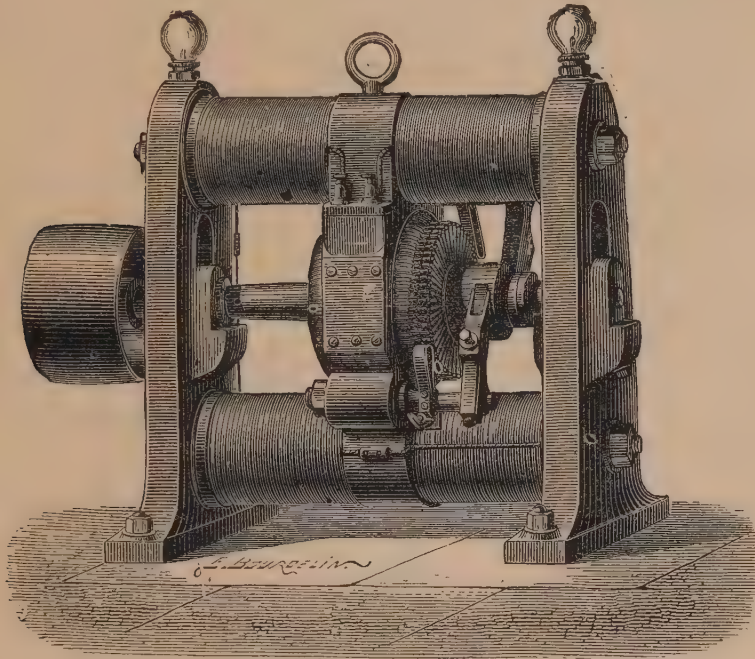


FIG. 28

avons employé en général pour les fils d'attache des fils de 4 millimètres ; d'ailleurs, la machine se trouvait tout près des autres résistances, de telle façon que les fils qui reliaient la machine aux points A et D n'avaient qu'une longueur de 40 centimètres chacun.

La résistance AB était formée par la bobine de fils de maillechort, chaque bobine ayant une résistance de 0,2 ohm avec du fil de 3 millimètres de diamètre ; ces quatre bobines étaient mises en quantité : on faisait plonger les extrémités des fils d'attache dans des godets de mercure (fig. 30).

C'est d'ailleurs la même disposition qui nous a servi précédemment. Les deux autres branches BC et CD étaient formées par des boîtes de résistance ordinaires ; seulement on avait eu soin d'employer des résis-

tances considérables pour que le fil ne se trouvât pas échauffé par le passage du courant. Cette résistance était de 3 à 5000 ohms, et comme la résistance des autres branches du pont n'est pas supérieure à 1 ohm, le courant le plus fort qui passe dans les boîtes, pour une intensité de 14 ampères est de :

$$\frac{44}{5000} \text{ ou } \frac{9}{1000}$$

c'est-à-dire d'environ 1/100 ampère. On voit que dans ces conditions aucun échauffement n'est à craindre.

Il restait à déterminer bien exactement la valeur de la résistance R' en A B. Cette résistance devait être égale à $\frac{0,20}{4} = 0,050$ ohm, mais comme

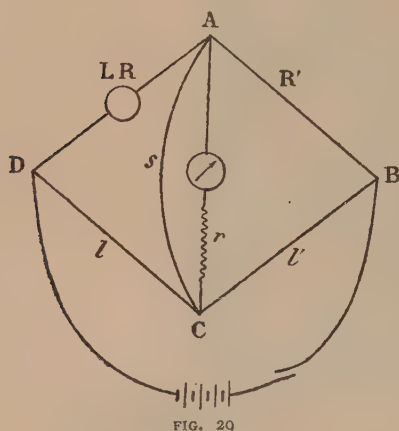


FIG. 29

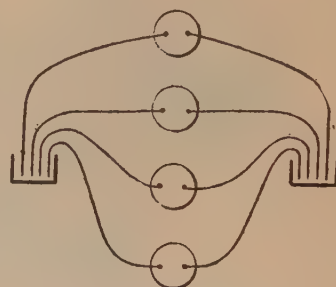


FIG. 30

les contacts pour d'aussi faibles résistances peuvent introduire des erreurs, il était indispensable de déterminer directement cette résistance avec une grande approximation. Cela était d'autant plus nécessaire que cette résistance servait à déterminer l'intensité du courant, par l'observation de la différence de potentiel aux extrémités.

Pour faire cette mesure, il suffit de remplacer la machine par une résistance bien connue ; nous nous sommes servi d'un étalon ayant exactement la résistance d'un mètre de mercure de 1 millimètre de section (unité Siemens).

Cette résistance peut s'adapter, sans fil d'attache, dans les godets de mercure : il suffit donc d'enlever les fils de la machine et de les remplacer par l'étalon. Nous avons trouvé ainsi pour la résistance : $R' = 0,0510$ ohm. La méthode était assez sensible pour qu'une différence de 1/10000 d'ohm produisît un déplacement très appréciable de l'image du galvanomètre. Quant aux boîtes qui forment les résistances BC et CD, nous n'avons vérifié que la plus forte résistance : elle s'est trouvée exacte à moins de 1/1000 près.

Comme source d'électricité, nous avons pris une série de 30 accumulateurs Faure; quelquefois nous avons employé ces accumulateurs conjointement avec des piles Bunsen. Pour arriver, par exemple, aux fortes

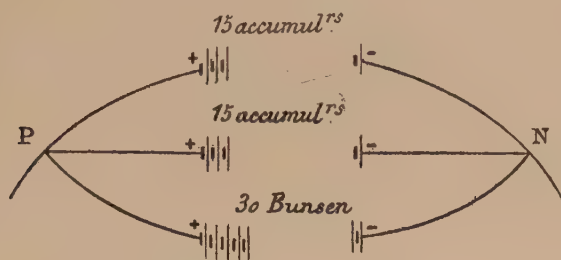


FIG. 31

intensités de 30 à 45 ampères, les accumulateurs seuls ne sont plus suffisants : nous avons employé la disposition suivante (fig. 31). Nous avons accouplé les 30 accumulateurs en 2 séries de 15, puis nous avons mis en opposition 30 éléments Bunsen; prenant alors le contact en P et N, nous avons eu un potentiel assez constant et nous avons pu arriver ainsi à des intensités de 44 ampères.

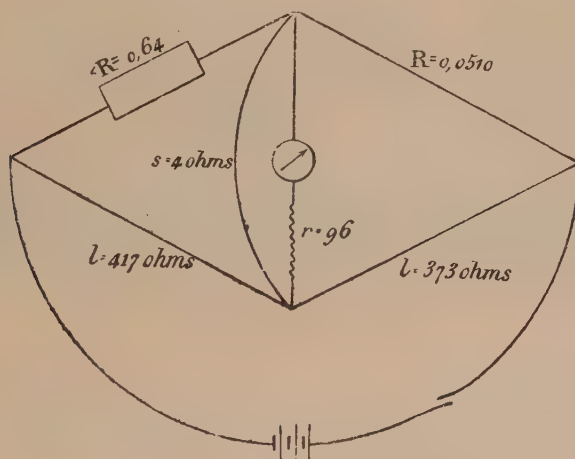


FIG. 32. — [Erratum. Lire : $l = 4717$ ohms, $l' = 373$ ohms, $R' = 0.0510$ ohms]

Pour mesurer l'intensité du courant on emploie le même galvanomètre qui sert à établir l'équilibre du pont, comme nous l'avons exposé plus haut.

Connaissant d'un côté la résistance $R' = 0.0510$ ohm et d'autre part la *f. é. m.*, on a l'intensité d'après la loi d'Ohm. Si l'échelle est graduée en centièmes de volt, il faut dans notre cas multiplier environ par 20. On a d'ailleurs pris soin de vérifier directement la graduation de l'échelle

avec des daniells, dont on a comparé la *f. é. m.* à des éléments L. Clark. Dans ce qui suit nous donnons toujours l'intensité corrigée.

Comme la détermination de l'intensité de courant était un point capital, nous avons tenu à vérifier la méthode précédente, qui est cependant rigoureuse. Nous avons mesuré avec un voltamètre industriel la différence de potentiel aux bornes de la machine et nous avons été surpris de trouver des différences allant du simple au double ; pourtant la graduation devait être bonne. Nous n'avons pas tardé à découvrir la cause de ce désaccord.

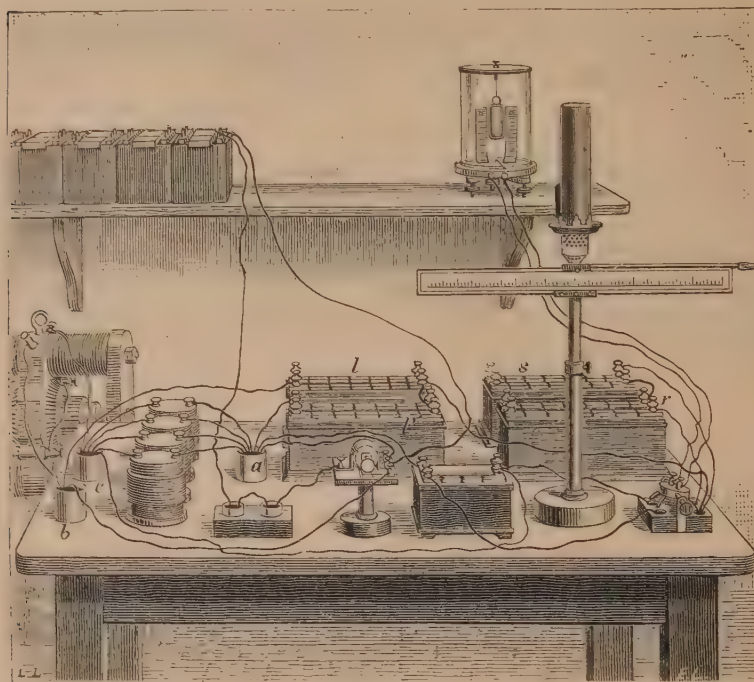


FIG. 33

Il tenait à l'influence que la machine exerçait sur le voltamètre qui était placé à une faible distance de la machine. Nous avons éloigné cet instrument : l'accord a été rétabli. Le même effet s'est produit, mais à un moindre degré avec un ampèremètre.

Nous avons tenu à constater ces faits, parce qu'on croit ordinairement que les ampèremètres et voltmètres, qu'on emploie dans l'industrie ne subissent aucune influence de la part des aimants voisins.

Voici les résultats de ces essais de vérification. L'ampèremètre indiquait 14 ampères ; le voltmètre 9 volts, la résistance R' étant de 0,64 ohm ; pour la résistance $R' = 0,051$, la différence de potentiel était de 0,72 volt.

On a ainsi :

$$\frac{0,72}{0,051} = 14,3 \text{ ampères} \quad \frac{9}{0,64} = 14,1 \text{ ampères}$$

On voit donc que ces trois mesures sont d'accord.

Lorsque le galvanomètre était employé pour constater l'équilibre du pont, il s'y trouvait intercalé une résistance de 96 ohms et une dérivation de 4 ohms (fig. 32), de sorte que la résistance totale était de 100 ohms : résistance qui rend le galvanomètre apériodique, mais sur le point de devenir périodique.

La figure 33 montre comment les communications ont été établies.

Le tableau suivant contient une série d'observations sur la machine Gramme type ordinaire d'atelier.

Inducteurs seuls

$$l = 4717 \text{ ohms} \quad l' = 373 \text{ ohms} \quad R' = 0,0510 \text{ d'où } R = 0,64 \text{ ohms}$$

$$r = 96 \text{ ohms} \quad s = 4 \text{ ohms}$$

Source d'électricité	Intensité ampères	δ rupture c.m.
2×15 accum. + 30 bunsens	44	11,8
— avec une résistance	39	11,4
2×15 accumulateurs	37	11,1
2×13 —	34	10,9
— avec résistance	31	10,6
2×11 accumulateurs	29	10,3
— avec résistance ..	26	9,8
2×9 accumulateurs	24	9,4
— avec résistance	21	8,8
2×7 accumulateurs	19	8,4
— avec résistance	16	7,6
5 accumulateurs	13,4	6,7
3 —	8	4,5
2 —	5,4	3,1
1 —	2,6	1,4

Cette série d'expériences se trouve représentée sur la figure 34 ; nous avons reproduit sur la même figure des expériences faites avec la machine Gramme du laboratoire des recherches de la Faculté des Sciences à la Sorbonne.

On constate que ces deux courbes coïncident exactement, ce qui montre une grande constance dans la construction de ces machines. Les électros sont loin d'être saturés, vers 18 ampères, comme la caractéristique semble l'indiquer.

Nous reproduisons ici (fig. 35 a) la caractéristique de la machine, prise par M. Hillairet : on voit que cette courbe s'incline beaucoup plus pour de fortes intensités. Sur la figure qui donne la caractéristique de

la machine Gramme (Bréguet), nous avons indiqué (fig. 35, c), les impulsions du galvanomètre; ces indications ont été réduites dans un rapport convenable pour être comparables à la caractéristique. Nous montrerons plus loin que les impulsions du galvanomètre sont bien réellement proportionnelles aux intensités du champ magnétique. On constate donc parfaitement la chute de potentiel; c'est-à-dire que la *f. é. m.* de la machine est moindre qu'elle ne devrait l'être d'après le champ magnétique. C'est ce que l'on constate avec toutes les machines, mais les raisons théoriques de ce fait ne sont pas encore bien connues, et actuellement il n'est pas possible de prévoir d'avance la grandeur de cette chute pour une dynamo en voie de construction.

La figure 34 montre les variations du coefficient de self-induction. On

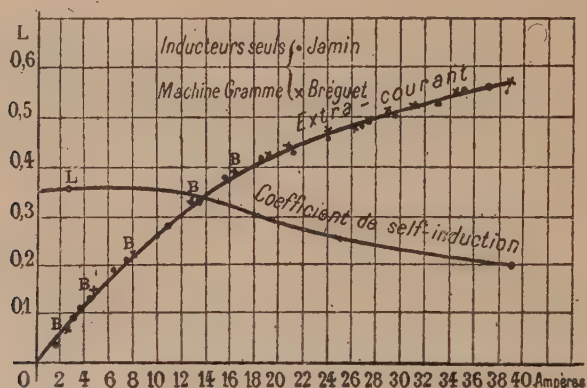


FIG. 34

voit que l'intensité du courant variant depuis 0 jusqu'à 39 ampères, la valeur du coefficient de self-induction diminue depuis 0,36 jusqu'à $0,20 \times 10^9$ c. m. c'est-à-dire dans un rapport de 1,8 à 1, ou presque de moitié.

Remarque

Cette valeur de $L = 0,20 \times 10^9$ c. m. est à peu près égale à celle que nous avons trouvée pour le petit électro-aimant à fil fin et dont le poids était de 1,900 k. g. Il peut paraître extraordinaire à première vue que le coefficient de self-induction d'une machine Gramme pesant 200 kilogrammes ne soit pas plus considérable que celui d'un petit électro-aimant de 2 kilogrammes, mais il ne faut pas oublier que la quantité d'électricité, fournie par l'extra-courant, n'est pas proportionnelle au coefficient de self-induction, mais à la capacité électro-magnétique. Lorsque la bobine se trouve en court circuit, la capacité électro-magnétique est $\frac{L}{r^2}$, r étant la résistance. Pour deux électro-aimants ayant le même coefficient de self-induction, l'extra-courant est donc inver-

sement proportionnel au carré de la résistance. Dans notre cas, on a pour la machine Gramme $R = 0,64$ ohm, et pour le petit électro-aimant : $R' = 6,8$ ohms ; la capacité électro-magnétique de la machine Gramme est donc 100 fois plus grande, ce qui rétablit à peu près la proportion.

Après avoir trouvé par la méthode indiquée la valeur du coefficient de self-induction de la machine Gramme, il nous a paru qu'il y avait intérêt à vérifier cette valeur en employant un galvanomètre périodique à faible amortissement. Dans le cas de forts électro-aimants, la méthode basée sur l'emploi d'une résistance additionnelle ne donne pas de bons résultats, car, pour obtenir une déviation permanente de même grandeur que l'impulsion, il faut, dans ces cas, ajouter à la résistance de l'électro-

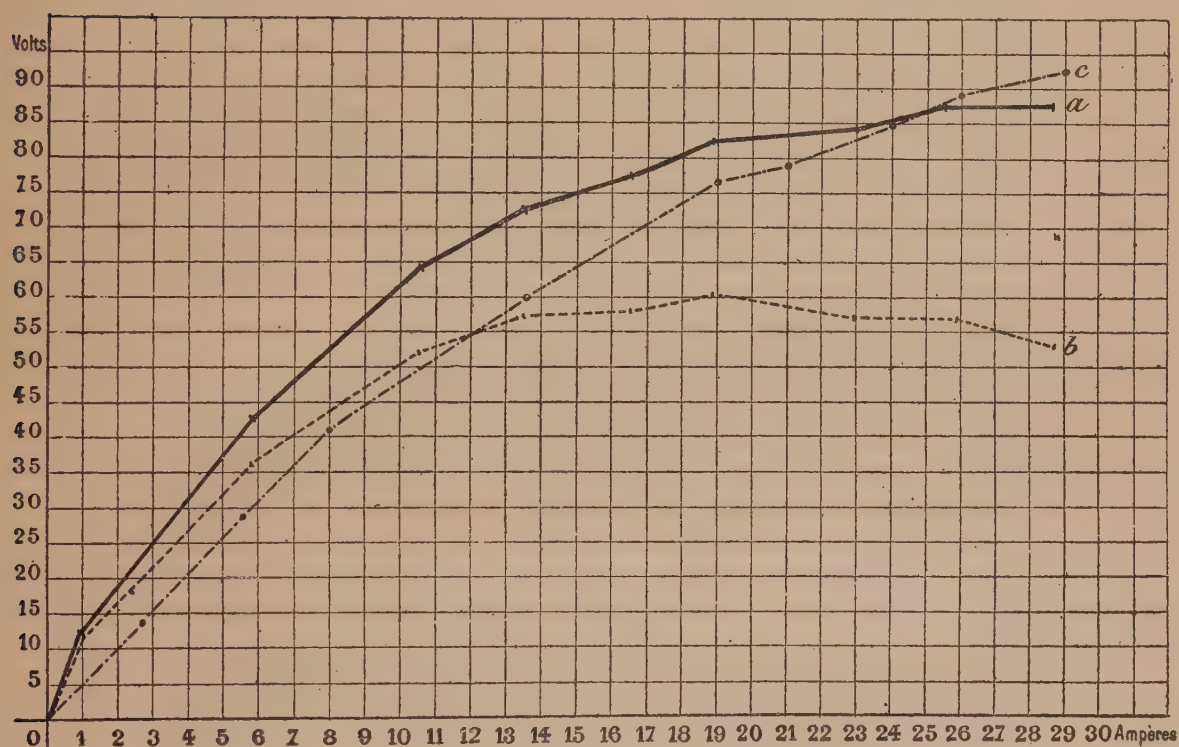


FIG. 35

aimant, non pas une petite fraction, comme on le suppose dans la formule, mais une fraction notable. Par exemple, la résistance de l'électro-aimant étant de 0,6 ohm, il faut ajouter 0,1 ohm, si l'on veut obtenir la même déviation du galvanomètre pour le courant continu que pour la décharge. Dans ces conditions, l'emploi de la formule n'est donc plus légitime. La méthode directe, au contraire, donne toujours des

résultats exacts. Avec un galvanomètre périodique à faible amortissement, on a :

$$L = \frac{i}{\alpha} \frac{\delta}{I} \left[R + l + g \left(\frac{l}{I} + 1 \right) \right] \frac{T}{\sqrt{\pi^2 + \lambda^2}} e^{\pi \frac{\lambda}{\pi^2 + \lambda^2} \arg \frac{\pi}{\lambda}}$$

Lorsque le décrément logarithmique λ est faible, on peut écrire :

$$L = \frac{T}{\pi} \frac{i}{\alpha} \frac{\delta}{I} \left[R + l + g \left(\frac{l}{I} + 1 \right) \right] \left(1 + \frac{\lambda}{2} \right)$$

Pour vérifier les résultats trouvés par la méthode basée sur l'emploi du galvanomètre apériodique, nous avons pris un de ces galvanomètres à lourdes aiguilles astatiques et à faible résistance qu'on trouve dans les cabinets de physique. Ce galvanomètre a une résistance inférieure à 1 ohm; la durée d'une oscillation simple est de 15 secondes environ. Pour nous en servir dans les mesures suivantes, il a fallu ajouter une résistance de 200 ohms afin d'atténuer la sensibilité; nous avons exposé dans le premier chapitre qu'il est alors préférable de se servir d'une résistance directement intercalée plutôt que d'une dérivation (shunt). Le décrément logarithmique est assez faible (0,092) pour que la formule précédente soit applicable.

Il y a une autre raison qui nous a engagé à faire la vérification des résultats précédemment obtenus avec un galvanomètre à longue période d'oscillation. On voit, en effet, que les gros électro-aimants demandent un temps très appréciable pour la charge et bien que la décharge soit considérée comme instantanée, on pourrait se demander si cette durée n'a pas une certaine influence, lorsqu'on se sert de galvanomètres à mouvements très rapides. Or, on va voir, par les expériences suivantes, que les résultats sont les mêmes, lorsque la durée des oscillations varie de 0^s,4 à 15^s,4. Il en est tout autrement pour le courant de charge : avec le galvanomètre à oscillations rapides, on obtient une impulsion d'environ moitié moindre que celle qui correspond à la décharge.

Voici les résultats comparatifs, obtenus avec les deux méthodes.

La source d'électricité était assez faible. Avec le galvanomètre périodique, on ne peut en effet employer de courants forts, car dans ce cas les fils s'échauffent assez promptement pour détruire l'équilibre du pont. D'ailleurs, il est impossible d'opérer vite et il faut installer le galvanomètre à une grande distance de la machine, pour éviter l'influence directe. Dans nos expériences, cette distance était de 10 à 12 mètres. Toutes ces circonstances amènent une si grande complication que les expériences qui sont simples et rapides avec le galvanomètre apériodique deviennent difficiles et laborieuses avec le galvanomètre périodique.

Pour les deux séries d'expériences, nous avons employé la même source d'électricité : 4 accumulateurs groupés en quantité. L'intensité du cou-

rant nous a été fournie par la mesure de la différence de potentiel aux bornes de la machine, dont la résistance était de 0,64 ohm. Cette différence de potentiel était de 1,70 volt, ce qui correspond à une intensité de 2,65 ampères. Le courant est resté bien constant pendant toute la durée des expériences. Les quatre branches du pont avaient pour résistance :

$$\left. \begin{array}{ll} R = 0,64 & R' = 0,051 \\ l = 4717 & l' = 370 \end{array} \right\} \text{ ohms } \frac{l}{l'} = 12,6$$

Galvanomètre apériodique Deprez-d'Arsonval

Formule :

$$L = \frac{T}{\pi} \frac{i}{\alpha} e^{\frac{\delta}{I}} \left[R + l + g \left(\frac{l}{l'} + 1 \right) + g \frac{R + l}{s} \right]$$

On a employé un shunt de 10 ohms, et, comme il faut que le circuit galvanométrique soit de 100 ohms, on a ajouté une résistance additionnelle de 90 ohms. On a ainsi :

$$g = 222 + 90 = 312 \quad s = 10$$

puis

$$\begin{array}{l} T = 0,386 \\ i = 10^{-6} \\ \alpha = 0,193 \end{array}$$

On a observé que pour un courant de $I = 2,65$ ampères, l'impulsion du galvanomètre était de $\delta = 3,5$ c. m.

On a ainsi, tous calculs faits

$$L = 0,352 \times 10^6 \text{ c. m.}$$

Galvanomètre périodique

Formule :

$$L = \frac{T}{\pi} \frac{i}{\alpha} \frac{\delta}{I} \left[R + l + g \left(\frac{l}{l'} + 1 \right) \right] \left(1 + \frac{\lambda}{2} \right)$$

La résistance totale du galvanomètre était $g = 200$ ohms. Pour la constante, on a observé qu'un élément Daniell, de *f. é. m.* 1,20 volt donne, à travers une résistance de 41200 ohms, une déviation de 8,0 cm. Cette déviation est observée à l'aide d'une lunette placée à 1,80 m., distance qui, d'ailleurs n'intervient pas dans le calcul.

Le décrement logarithmique est $\lambda = 0,092$, d'où $1 + \frac{\lambda}{2} = 1,046$ et la durée d'oscillation $T = 15^s,4$.

Ainsi

$$\frac{i}{\alpha} = \frac{1,2}{41200} - \frac{1}{8,0}$$

En effectuant les calculs, on trouve ainsi

$$L = 0,359 \times 10^9 \text{ cm.}$$

L'erreur relative de ces deux résultats n'est donc que de $\frac{7}{350} = \frac{1}{50}$ et l'accord entre les deux méthodes est très satisfaisant.

Ayant ainsi déterminé le coefficient de self-induction des inducteurs, nous allons examiner si, dans le cas d'une machine Gramme, la proportionnalité entre l'extra-courant et l'intensité du champ magnétique a toujours lieu.

Il faut donc déterminer l'intensité du champ magnétique. Or, dans une machine dynamo, ce champ est très complexe, mais pour nous il suffit de connaître l'intensité moyenne en un point quelconque.

Il existe très peu de moyens directs pour la mesure de l'intensité du champ magnétique d'une dynamo. Quelquefois on déduit l'intensité moyenne d'après la *f. é. m.* développée par la machine : c'est ainsi que M. Kittler ⁽¹⁾ arrive à des intensités de 4,000 à 6,000 unités C. G. S. M. Marcel Deprez ⁽²⁾ assure, au contraire, d'après l'effet mécanique produit par la machine, que le champ magnétique n'excède pas 2500 C. G. S. Il serait donc intéressant de pouvoir contrôler directement ces divers résultats. Comme, dans notre cas, nous n'avons pas à déterminer l'intensité en valeur absolue, il nous a suffi de faire passer un fil entre l'anneau et les pièces polaires et d'observer l'impulsion que reçoit le galvanomètre, lorsqu'on coupe le courant dans les inducteurs; cette impulsion est proportionnelle à l'intensité du champ.

Nous nous sommes servi à cet effet d'un galvanomètre Deprez-d'Arsonval avec un cadre de faible résistance (0,57 ohm); comme le fil qui entoure l'anneau de la machine n'a aucune résistance sensible, on obtient des impulsions considérables : on peut les diminuer par l'introduction d'une résistance. La résistance totale du circuit restant invariable, la mesure de l'angle d'impulsion peut servir de mesure à la quantité d'électricité produite; les mesures sont comparables entre elles, tant que la résistance du circuit ne varie pas.

Le tableau suivant montre que l'accord est parfait; pour la facilité des comparaisons, on avait intercalé une résistance telle que, pour une certaine intensité, les impulsions des deux galvanomètres étaient les mêmes.

(1) KITTLER, *Electrotechnic*, p. 469 et 470, 1886.

(2) DEPREZ, *La Lumière Électrique*, t. 18, p. 111, 1885.

Extra-courant et intensité du champ magnétique

Intensité du courant ampères	Extra-courant q	Intensité du champ magnétique F
2,6	1,4	1,4
5,2	—	3,0
5,4	3,1	—
6,4	—	3,8
7,8	—	4,5
8,0	4,5	—
10,2	—	5,6
13,4	6,7	—
15,2	—	7,5
16,2	7,6	—
19,0	8,4	—
20,0	—	8,8
21,2	8,8	—
24,0	9,4	—
24,6	—	9,7
26,2	9,8	—
28,0	—	10,1
29,2	10,3	—
30,0	—	10,5
31,4	10,6	—
34,6	10,9	—

Les résultats précédents sont mis en évidence sur la figure 36. Le champ magnétique est désigné par la lettre F , et l'extra-courant par la

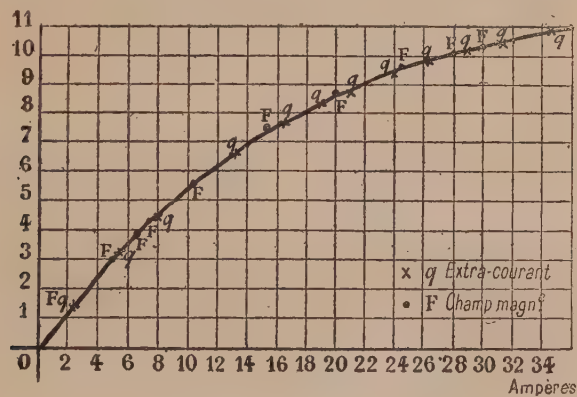


FIG. 36

lettre q . On voit que la loi de la proportionnalité se vérifie très bien dans ces conditions.

Nous terminerons ce travail par la mesure du coefficient de self-induction de l'anneau de la machine. Nous avons fait ces déterminations dans deux conditions distinctes : d'abord sans excitation des

inducteurs, puis en lançant dans les inducteurs un courant énergétique de 30 à 35 ampères.

Les deux courbes ci-jointes montrent les résultats de ces expériences : on voit que le coefficient diminue, lorsque les électros sont excités, ce qui est d'accord avec la théorie.

Pour un courant de 20,4 ampères dans l'anneau, nous avons trouvé :

$$L = 0,0287 \times 10^9 \text{ cm. sans excitation}$$

$L = 0,0152 \times 10^9 \text{ cm. avec un courant de 31 ampères dans les inducteurs (fig. 27).}$

La résistance de l'anneau était de 0,47 ohm. On voit, sur la fig. 37, que

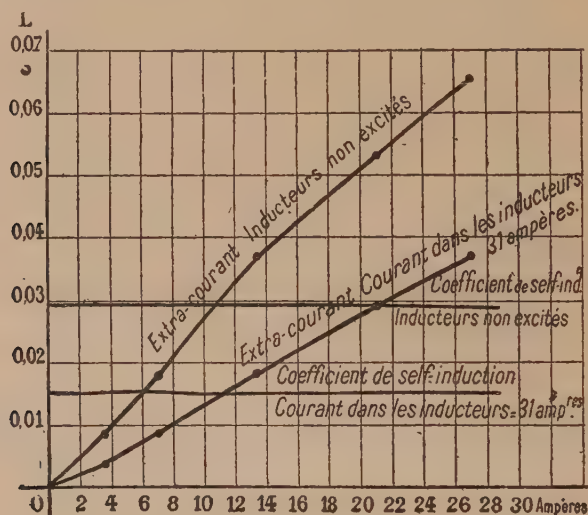


FIG. 37

les courbes représentant l'extra-courant sont des lignes presque droites : lorsque les inducteurs sont excités, la ligne est parfaitement droite et le coefficient de self-induction est une constante. Sans excitation des électro-aimants, la ligne est légèrement convexe, mais on voit que, même pour des courants de 27 ampères (et le régime normal est de 25 ampères), il n'y a pas trace de saturation. En toute rigueur, il faudrait, pour tirer des conséquences de ces expériences, répéter les mesures sur l'anneau enlevé de la machine, afin de constater l'influence des inducteurs. Quoiqu'il en soit, il est un fait remarquable : c'est que, dans l'anneau, les électros étant fortement excités, le coefficient de self-induction est tout à fait constant et indépendant du courant qui circule dans cet anneau.

NOTE A

SUR LA FORCE ÉLECTROMOTRICE DUE A LA SELF-INDUCTION

Les auteurs qui, les premiers, se sont occupés de l'induction d'une bobine sur elle-même ont constamment envisagé le cas où la bobine ne renferme pas de fer. Dans ces conditions, le coefficient de self-induction ou le potentiel de la bobine sur elle-même est une quantité constante qui ne dépend que des données géométriques de la bobine.

La force électromotrice due à la self-induction est dans ces conditions :

$$e = L \frac{dI}{dt}$$

On peut donc définir le coefficient de self-induction comme étant le facteur, qui multiplié par $\frac{dI}{dt}$ donne la force électromotrice.

Dans le cas d'une bobine renfermant un noyau de fer doux, le coefficient

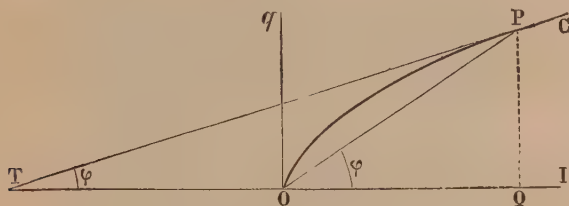


FIG. 38

de self-induction est une quantité variable et on peut définir ce coefficient d'après l'une des deux équations suivantes :

$$e = \frac{dLI}{dt} \text{ (1) ou } e = L \frac{dI}{dt} \text{ (2)}$$

La première de ces équations correspond à celle adoptée le plus souvent par les physiciens et il est à remarquer qu'on déduit dans ce cas le coefficient de self-induction de la quantité d'électricité q fournie par l'extracourant par la même formule que si le coefficient L était constant.

On a, en effet, si i_0 représente l'intensité du courant qui passe par le galvanomètre au temps t :

$$e = L \frac{dI}{dt} = ki_0 \quad \text{si } L \text{ constant}$$

et

$$e = \frac{dLI}{dt} = ki_0 \quad \text{si } L \text{ variable.}$$

On a ainsi :

$$\int_0^I L dI = LI = k \int i_0 dt = kq \quad \text{si } L \text{ constant}$$

(1) Voir MASCART et JOUBERT. Leçons d'électricité, I, p. 567.

(2) HOSPITALIER. L'Electricien, t. VIII, p. 258, 1884.

et

$$\int_0^I dLI = LI = k \int i_0 dt = kq \text{ si } L \text{ variable}$$

On voit donc qu'on trouve dans les deux cas :

$$L = k \frac{q}{I}$$

C'est d'après cette définition que nous avons déterminé les valeurs du coefficient de self-induction dans le travail précédent.

Il est à remarquer que, d'après cette définition, une construction très simple permet de trouver à volonté, soit le coefficient de la self-induction, soit le facteur proportionnel à la force électromotrice, en partant de la courbe qui représente l'extra-courant en fonction de l'intensité.

Soit OC cette courbe; on a, comme nous venons de le voir :

$$L = k \frac{q}{I}$$

La tangente de l'angle POQ = φ est donc proportionnelle au coefficient de self-induction, et c'est d'après ce principe que nos courbes ont été construites.

Pour trouver le facteur qui, multiplié par $\frac{dI}{dt}$, donne la *f. é. m.*, il suffit de considérer la tangente au point P.

On a, en effet,

$$tg\,PTQ = tg\,\varphi' = k \frac{dq}{dI}$$

car on a

$$e = \frac{dLI}{dt} = \left(L + I \frac{dL}{dI} \right) \frac{dI}{dt}$$

et

$$LI = kq$$

d'où

$$L + I \frac{dL}{dI} = k \frac{dq}{dI}$$

Dans notre cas, L décroît avec I, et les deux courbes, qui, au début étaient identiques se séparent de telle façon que celle qui représente les valeurs de L reste au-dessus de l'autre.

NOTE B

SUR LA MESURE DE L'INTENSITÉ DU CHAMP MAGNÉTIQUE

Soit une bobine de surface totale S, de résistance r , et un galvanomètre apériodique Deprez-d'Arsonval de résistance g ; fermons le circuit de la bobine et du galvanomètre sur une résistance r' . Si la bobine S se trouve dans un champ magnétique d'intensité F et si elle est perpendiculaire aux

lignes de force, il passe dans le galvanomètre, par la suppression du champ magnétique, une quantité d'électricité q , mesurée par l'impulsion d et on a :

$$q = k \delta = \frac{FS}{g + r + r'}$$

Pour éliminer la constante k du galvanomètre, on peut utiliser la décharge d'un condensateur. Soit C la capacité, E la *f. é. m.*, il se fera, en laissant la bobine S et la résistance r' en place, un partage d'électricité, et il passera dans le galvanomètre une quantité d'électricité q' telle que

$$q' = k \delta' = CE \frac{r + r'}{g + r + r'}$$

δ' étant l'impulsion produite.

La constante k a la même valeur que dans l'équation précédente, car la

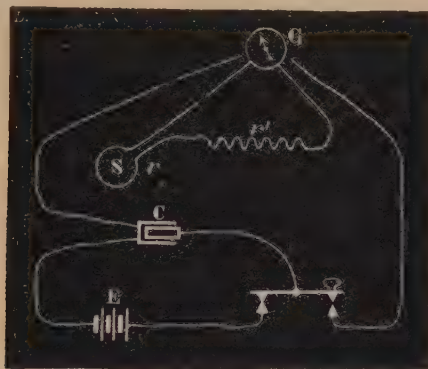


FIG. 39

résistance totale du circuit galvanométrique est restée la même; en éliminant k , on a donc :

$$F = \frac{CE (r + r')}{S} \frac{\delta}{\delta'}$$

Il est à remarquer que, dans cette équation, il n'intervient aucune constante du galvanomètre, pas même la résistance. Si en r' on a disposé une boîte de résistances continues, on peut prendre la valeur de r' telle que $\delta = \delta'$, ce qui élimine l'erreur qui pourrait provenir d'un défaut d'uniformité du champ magnétique du galvanomètre.

Lorsque le champ à mesurer est intense, on peut employer une bobine de faible surface, ce qui permet l'emploi de bobines plates de 1 à 2 millimètres d'épaisseur, faciles à introduire entre les inducteurs et l'armature d'une dynamo. Nous nous servons d'un galvanomètre Deprez-d'Arsonval à faible résistance (0,6 ohm).

Voici un exemple de mesure faite à l'aide de cette méthode. La petite

bobine (longueur 51 millimètres, largeur 11 millimètres, 10 tours de fil) est placée sur la verticale entre l'anneau et les inducteurs d'une machine Gramme, type d'atelier. Le courant qui circule dans les inducteurs est de 25,5 ampères, l'anneau n'étant pas dans le circuit. La résistance de la bobine avec les fils d'attache est $r = 1,35$ ohm, et la résistance additionnelle est $r' = 4$ ohms. Par la rupture du courant, l'image du galvanomètre reçoit une impulsion $\delta = 19,6$ cm. Comme deuxième mesure, on a déchargé un condensateur d'une capacité de $C = 1$ microfarad, chargé à une force électro-motrice de $E = 119$ volts, à travers le galvanomètre, la bobine et la résistance additionnelle étant restées attachées aux bornes du galvanomètre; l'image du galvanomètre a ainsi indiqué une impulsion $\delta' = 7,8$ cm. D'après la formule précédente, on trouve ainsi :

$$F = 2850 \text{ C. G. S.}$$

Nous avons montré plus haut, par des mesures relatives, qu'il y a proportionnalité entre l'intensité du champ magnétique et la quantité d'électricité fournie par l'extra-courant. La méthode actuelle permet la vérification pour des mesures absolues :

Ainsi, pour les inducteurs de la machine Gramme, nous avons trouvé que l'impulsion due à l'extra-courant était de 9,8 cm. pour un courant de 25,5 ampères et de 1,4 cm. pour un courant de 2,5 ampères.

Il s'en suit que l'intensité du champ magnétique pour le courant de 2,5 ampères doit être :

$$F = 2850 \times \frac{1.4}{9.8} = 407 \text{ C. G. S.}$$

Or, la mesure directe par la méthode précédente a donné la valeur

$$F = 409 \text{ C. G. S.}$$

ce qui montre que l'accord est parfait.

Afin de soumettre les résultats obtenus par la méthode dont il s'agit ici à une vérification rigoureuse, nous avons, M. Leduc et moi, mesuré simultanément le champ magnétique produit par un électro-aimant de Faraday.

Voici les résultats de ces mesures :

M. Leduc, au moyen de l'explorateur, préalablement contrôlé par comparaison avec la composante verticale.....	2 650 C. G. S.
Méthode précédente.....	2 675
Ce qui donne une erreur d'environ.....	1 0/0

Pour mesurer l'intensité du champ magnétique par la méthode précédente, on est obligé de le détruire, tandis que la méthode de l'explorateur de M. Leduc a l'avantage de pouvoir se pratiquer sans aucune variation dans l'intensité du champ.

NOTE C

SUR LA DISTRIBUTION DU MAGNÉTISME AUTOUR DE L'ANNEAU GRAMME

A l'aide de la méthode précédemment exposée, nous avons mesuré l'intensité du champ magnétique autour de l'anneau d'une machine Gramme, type d'atelier, l'intensité du champ étant prise perpendiculairement aux spires de l'anneau. A cet effet, nous avons introduit entre les inducteurs

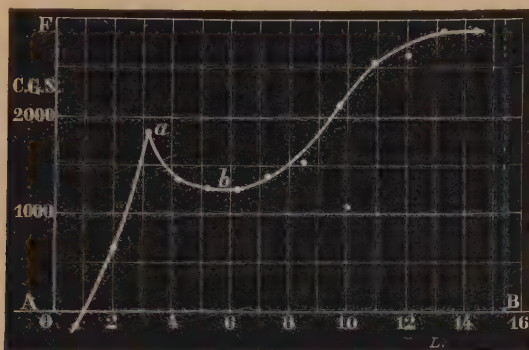


FIG. 1

et l'anneau une petite bobine plate (51 millimètres de longueur, 11 millimètres de largeur, 1 1/4 mm. d'épaisseur) et nous avons déterminé l'intensité du champ pour les différentes positions de la bobine. Afin de bien fixer ces positions, on a monté sur la machine, de part et d'autre de l'anneau, deux disques en bois, de même diamètre que le diamètre exté-

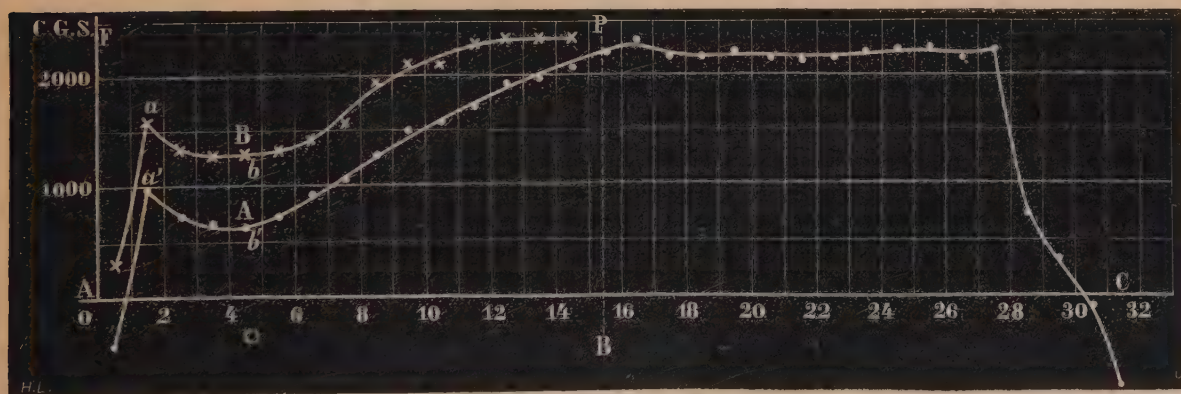


FIG. 2

rieur de l'anneau et portant une division en centimètres : la circonférence développée de ces disques, 61,6 cm., est prise comme axe des abscisses, dans les diagrammes ci-joints.

Les ordonnées représentent, en unités C. G. S., l'intensité du champ magnétique.

La fig. 1 représente l'intensité du champ magnétique sur l'étendue d'un quart de la circonférence, l'anneau n'étant pas dans le circuit et l'intensité de courant excitateur étant de 25,5 ampères; le point *a* correspond à l'extrémité des pièces polaires. Le maximum du champ correspond à la position verticale, et on a :

$$F = 2850 \text{ C. G. S.}$$

Sur la fig. 2 on a relevé (courbe B) les mêmes mesures pour une intensité de 16 ampères : on voit, dans ces conditions, que la courbe conserve

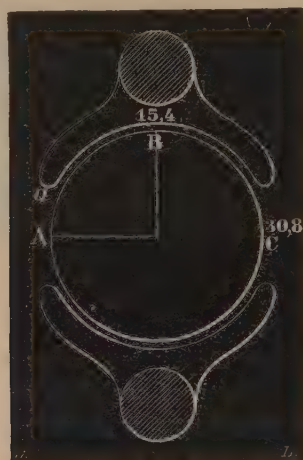


FIG 3

le même aspect, mais que la diminution vers la région *b* est moins prononcée. Ces courbes doivent être symétriques autour de la ligne BP.

La courbe (A) de la même figure représente l'intensité du champ lorsque l'anneau est intercalé dans le circuit et qu'on empêche la machine de tourner. L'intensité du courant était de 16,5 ampères. On voit que vers la gauche l'intensité a diminué de près de moitié, et que vers la droite l'intensité est sensiblement constante dans une grande étendue. Les balais étaient calés de la manière ordinaire et pour une intensité normale de 25 ampères.

NOTE D

SUR LA DÉTERMINATION DU COEFFICIENT D INDUCTION MUTUELLE

Presque toutes les méthodes qu'on a proposées pour la détermination de ce coefficient reposent sur l'induction mutuelle par variation d'intensité. Pour des bobines sans fer, ce coefficient est une quantité constante ;

il est par conséquent indépendant des courants qui peuvent circuler dans les bobines.

Lorsqu'il s'agit, au contraire, de bobines pourvues de noyaux de fer doux, le coefficient d'induction mutuelle est fonction des deux courants qui circulent dans chacune des deux bobines. Les méthodes employées le plus souvent supposent que l'intensité du courant inducteur est assez faible et que dans la bobine induite il ne circule aucun courant; dans ce cas le coefficient est maximum.

Pour mesurer le coefficient d'induction mutuelle de deux bobines avec noyau de fer doux, un courant circulant dans chaque bobine, nous avons employé la méthode suivante.

Soit P Q le fil inducteur et D A le fil induit.

Le fil induit R est arrangé en pont de Wheatstone avec trois résistances auxiliaires R', l et l' dépourvues d'induction.

Cet arrangement permet de mesurer l'induction sur le fil D A pendant que ce fil est parcouru par un courant d'une intensité donnée.

On provoque cette induction par la variation du courant dans P Q.

On peut arriver ainsi à mesurer l'induction mutuelle lorsque de forts courants circulent dans D A et dans P Q, et on peut faire agir les deux courants dans le même sens ou en sens contraire.

Formule :

Soit I l'intensité dans... D A
 — J —... P Q
 — M le coefficient d'induction mutuelle.

En appliquant les lois de Kirchhoff, on a :

$$\begin{aligned} I + i_s &= i' \\ i' + i'_1 &= I' = I + i \\ \text{D A C} \quad I R - i_s g - i_1 l &= - \frac{d M J}{d t} \\ \text{A B C} \quad i' R' - i'_1 l' + i_s g &= 0 \end{aligned}$$

D'où l'on déduit :

$$\begin{aligned} I(R + l) - i_s g - I' l &= - \frac{d M J}{d t} \\ I(R' + l') + i_s (R' + l' + g) - I' l' &= 0 \end{aligned}$$

En éliminant I', on trouve :

$$I(R l' - R' l) - i_s [g l' + R' l + l l' + g l] = - l' \frac{d M J}{d t}$$

Lorsque l'équilibre permanent du pont existe, on a :

$$R l' - R' l = 0$$

d'où

$$\int d M J = [R + l + g \left(1 + \frac{l}{l'}\right)] \int i_s dt$$

Or, on a :

$$\int_0^I d M J = M J$$

D'autre part, $\int i_0 dt = q$ est la quantité d'électricité qui passe à travers le galvanomètre. Lorsqu'on se sert d'un galvanomètre apériodique Deprez-Arsonval, employé dans les conditions que nous avons décrites, on a la relation :

$$q = \delta \frac{T}{\pi} \frac{i}{\alpha} e$$

δ étant l'impulsion due au passage de la quantité d'électricité q .

On a donc :

$$(1) \quad M = \frac{T}{\pi} \frac{i}{\alpha} e \frac{1}{J} \delta \left[R + l + g \left(1 + \frac{l}{l'} \right) \right]$$

La résistance r de la pile n'intervient pas dans cette formule ; on peut donc modifier cette résistance à volonté, sans avoir besoin d'en tenir compte.

Cette formule est identique à celle qui sert à calculer le coefficient de self-induction de la bobine : on a, dans ce cas,

$$(2) \quad L = \frac{T}{\pi} \frac{i}{\alpha} e \frac{1}{I} \delta \left[R + l + g \left(1 + \frac{l}{l'} \right) \right]$$

La seule différence, c'est que, dans la dernière formule, I représente l'intensité dans la branche AD .

Les formules précédentes fournissent en outre un moyen très simple pour la comparaison du coefficient d'induction mutuelle M de deux bobines avec le coefficient de self-induction, L , de l'une d'elles. En divisant les deux formules, membre à membre, on a :

$$(3) \quad \frac{M}{L} = \frac{1}{J} \frac{\delta}{\delta}$$

Il est à remarquer d'abord que, dans cette formule, il n'est pas nécessaire de donner à la résistance du circuit galvanométrique la valeur qui correspond au cas d'égalité des racines de l'équation caractéristique du mouvement du cadre ; car, lorsque la résistance extérieure au galvanomètre a une valeur quelconque, il faut dans les équations précédentes remplacer le facteur e par un facteur k , fonction de la résistance extérieure : cette résistance étant la même dans les deux cas, le facteur k a aussi la même valeur et s'élimine par la division.

Dans la formule (3) aucune résistance n'intervient ; il n'y entre que les déviations et les intensités des courants. Comme, dans le cas des bobines avec fer, M et L sont facteurs des intensités des courants, il faut que ces valeurs interviennent dans la formule.

Dans la méthode de comparaison proposée par Maxwell ⁽¹⁾ et étudiée par M. Brillouin ⁽²⁾, l'intensité du courant dans les bobines n'intervient pas, la formule ne renferme que des résistances ; la méthode est une méthode de réduction à zéro, avec l'emploi d'une seule pile. Il paraît d'ailleurs que Maxwell a eu toujours en vue dans ses procédés de mesures, des bobines sans fer et qu'il n'a pas envisagé le cas où, les bobines renfermant des noyaux de fer, leurs coefficients d'induction sont de grandeurs variables avec les intensités des courants. Dans le traité de Maxwell, nous n'avons pas trouvé un seul mode de mensuration dans lequel les coefficients d'induction fussent des quantités variables.

M. Brillouin, non plus, ne parle pas de variation de ce coefficient : toutes les mesures qu'il a faites s'appliquent à des bobines sans fer.

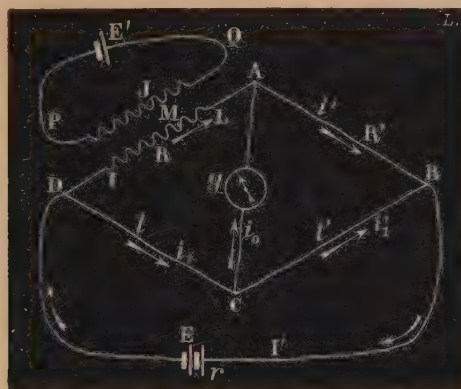


FIG. 1

Des applications récentes de l'électricité, basées sur l'emploi de bobines d'induction (transformateurs), en vue de l'éclairage par le courant alternatif, rendent ce sujet particulièrement intéressant.

Comme le rendement, dans ce système, dépend en majeure partie de la valeur du coefficient d'induction mutuelle et que les bobines renferment des masses de fer, on n'est aucunement autorisé à baser son opinion sur une seule valeur de ce coefficient d'induction ⁽¹⁾.

Il faut, au contraire, étudier comment ce coefficient varie avec les intensités et le sens des courants dans les bobines.

⁽¹⁾ MAXWELL, *Treatise on Elect. and Magn.*, t. II, p. 356.

⁽²⁾ BRILLOUIN, *Comparaisons des coefficients d'induction*, p. 21 et p. 13

⁽¹⁾ Voir FERRARIS, *La Lumière Électrique*, t. 17, p. 145, 1885.

Pour connaître la valeur du coefficient d'induction mutuelle, il faudrait construire des courbes comme nous l'avons fait pour le coefficient de self-induction. Des expériences dans ce but sont actuellement en voie d'exécution; les résultats déjà obtenus, montrent que le coefficient d'induction mutuelle varie dans de fortes proportions, avec les différentes valeurs de l'intensité des courants.

Vu et approuvé :

Paris, le 8 juin 1886.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,
E. HÉBERT.

Vu et permis d'imprimer,

Paris, le 8 juin 1886.

LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,
GRÉARD.

SECONDE THESE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

Applications de l'électricité à l'analyse chimique.

Vu et approuvé :

Paris, le 8 juin 1886.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,
E. HÉBERT.

Vu et permis d'imprimer :

Paris, le 8 juin 1886.

LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,
GRÉARD.

